Lehrbuch
der angewandten Mathematik.

Zweites Bändchen

die Geostatik enthaltend;

bearbeitet

von

D. C. L. Lehmus,
Dr. der Philosophie.

Berlin, 1818.
In der Realschulbuchhandlung.

Inhalt des zweiten Bändchens.

Erster Abschnitt. Vom Schwerpunkt	§. 1	bis	51
Allgemeine Untersuchungen	§. 1	—	14
Schwerpunkte der Curven	§. 15	—	17
— — der ebenen Figuren	§. 18	—	28
— — der nicht ebenen Figuren	§. 29	—	39
— — der Körper	§. 40	—	51
Zweiter Abschnitt. Vom materiellen Hebel	§. 52	—	71
Von demselben insbesondere	§. 53	—	55
Von der Stabilität	§. 56	—	63
Von der Wage	§. 64	—	72
Dritter Abschnitt. Von der Reibung und Steifheit der Seile	§. 72	—	87
Vierter Abschnitt. Von den gespannten Seilen	§. 88	—	101
Von den Rollen und Flaschenzügen	§. 88	—	93
Von den Seilmaschinen	§. 94	—	101
Fünfter Abschnitt. Von der schiefen Ebene, dem Keil und der Schraube	§. 102	—	120
Von der schiefen Ebene	§. 102	—	109
Vom Keil	§. 110	—	113
Von der Schraube	§. 114	—	120
Sechster Abschnitt. Von der Vertheilung des Drucks u. s. w.	§. 121	—	123

Siebenter Abschnitt. Von der Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen, und der Kraftbestimmung bei in einander greifenden Räderwerk . . . . . . §. 124 bis 139
Von der Gestalt der Zähne u. s. w. . . . §. 124 — 136
Von der Kraftbestimmung u. s. w. . . . §. 137 — 139

Achter Abschnitt. Von der Festigkeit der Materialien . . . . §. 140 — 149
Von der absoluten Festigkeit . . . . . §. 141 — 143
Von der relativen Festigkeit . . . . . . §. 144 — 148
Von der rückwirkenden Festigkeit . . . . §. 149

Die Geostatik.

Erster Abschnitt.

Vom Schwerpunct.

§. 1. **Lehrsatz.** Wenn in bestimmten Puncten eines festen Systems, Kräfte nach parallelen Richtungen angreifen, und man ändert die Richtungen, aber ohne die Parallelität derselben aufzuheben, und bestimmt für jede angenommene Lage die jedesmalige Richtungslinie der mittleren Kraft, so schneiden sich alle diese Richtungslinien in einem und denselben Puncte.

Beweis. Es bezeichnen A; B; C u. s. w. die Größe der Kräfte; A′; B′; C′ u. s. w. ihre Richtungslinien; a; b; c u. s. w. die normalen Abstände ihrer Angriffspuncte von einer willkührlichen Ebene △; (die des Papieres *Fig.* 1) a′; b′; c′ u. s. w. die Normalen in △ von den Projectionen der Angriffspuncte auf eine willkührlich gewählte Linie ,l in △; ,a; ,b; ,c u. s. w. die zugehörigen Abscissen auf ,l von irgend einem Punct π aus, gemessen; α; β; γ u. s. w. die Neigungswinkel sämmtlicher Linien A′; B′; C′ u. s. w.

gegen $\triangle$ in den verschiedenen angenommenen Lagen; α'; β'; γ' u. s. w. die Neigungswinkel ihrer jedesmaligen Projectionslinien auf $\triangle$, gegen $_{,}l$; M die Größe der mittleren Kraft $= A + B +$ u. s. w.; M'; M''; M''' u. s. w. ihre Richtungslinien in den auf einander folgenden verschiedenen angenommenen Lagen; m'; m''; m''' u. s. w. die Normalen von den Durchschnittspuncten der Linien M'; M''; M''' u. s. w. mit $\triangle$ auf $_{,}l$; $_{,}m$; $_{,,}m$; $_{,,,}m$ u. s. w. die zugehörigen Abscissen auf $_{,}l$ von π aus.

1) In *Fig.* 1 sei v die Projection des Angriffspunctes von A auf $\triangle$; vk die Projection von A'; man errichte auf vk in v eine Normale $vw = a$; mache $\llcorner\, vwp = 90° - \alpha$ und denke sich vwp um vp so lange gedreht bis seine Ebene normal auf $\triangle$ steht, so ist in dieser Lage w der Angriffspunct von A; $wp = A'$ und $wpv = \alpha$; also p der Durchschnittspunct von A' und $\triangle$. Fällt man nun die Normale pr auf $_{,}l$ und setzt $pr = (a')$; $\pi r = (_{,}a)$, so hat man

$$(a') =$$
$$= a' - vp \text{ Sin. } \alpha'$$
$$= a' - a \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha';$$
$$(_{,}a) = {}_{,}a + vp \text{ Cos. } \alpha'$$
$$= {}_{,}a + a \text{ Cotg. } \alpha \text{ Cos. } \alpha'$$

Eben so

$$(b') = b' - b \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha'$$
$$(_{,}b) = {}_{,}b + b \text{ Cotg. } \alpha \text{ Cos. } \alpha'$$

u. s. w.

2) Nach §. 60 (I. B.) ist nun

$$m' = \frac{A\,(a') + B\,(b') + \ldots}{A + B + \ldots}$$

$$,m = \frac{A\,(,a) + B\,(,b) + \ldots}{A + B + \ldots}$$

oder, wenn man die obigen Werthe nimmt

$$m' = \frac{Aa' + Bb' + \ldots - (Aa + Bb + \ldots)\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'}{M}$$

$$,m = \frac{,aA + ,bB + \ldots + (Aa + Bb + \ldots)\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha'}{M}$$

oder, wenn man

$Aa' + Bb' + \ldots$ mit P

$,aA + ,bB + \ldots$ mit Q

und $Aa + Bb + \ldots$ mit R;

bezeichnet,

$$m' = \frac{P - R\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \alpha'}{M}$$

$$,m = \frac{Q + R\ \text{Cotg.}\ \alpha\ \text{Cos.}\ \alpha'}{M}$$

Eben so

$$m'' = \frac{P - R\ \text{Cotg.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \beta'}{M}$$

$$,,m = \frac{Q + R\ \text{Cotg.}\ \beta\ \text{Cos.}\ \beta'}{M}$$

$$m''' = \frac{P - R\ \text{Cotg.}\ \gamma\ \text{Sin}\ \gamma'}{M}$$

$$,,,m = \frac{Q + R\ \text{Cotg.}\ \gamma\ \text{Cos.}\ \gamma'}{M}$$

u. s. w.

3) Ist nun *Fig.* 2 fg die Projectionslinie von M′ auf $\triangle$; ht die von M″; ir die von M‴; so muß erstens bewiesen werden, daß diese 3 Linien fg, ht und ir sich in einem und denselben Punct x schnei-

den, d. h. es muß gezeigt werden, daß q; l und w in einem Punct zusammenfallen. Ist ferner y der Durchschnittspunct von M' und Δ; p der von M'' mit Δ und z der von M''' mit Δ; so muß zweitens bewiesen werden, daß

$$xy \text{ tg. } \alpha;\ xp. \text{ tg. } \beta;\ xz \text{ tg. } \gamma$$

alle einerlei Größe haben, und der Endpunct jeder dieser gleichen Linien, normal auf Δ in x errichtet gedacht, ist dann der gemeinschaftliche Durchschnittspunct aller Linien der mittleren Kraft.

4) Es ist

$$tg = m' \text{ Cotg. } \alpha' + {}_{\prime}m - {}_{\prime\prime}m + m'' \text{ Cotg. } (180 - \beta')$$

oder wenn man die Werthe aus 2) nimmt,

$$tg = \frac{P(\text{Cotg. } \alpha' - \text{Cotg. } \beta')}{M}$$

Eben so

$$rg = m' \text{ Cotg. } \alpha' + {}_{\prime}m - {}_{\prime\prime\prime}m - m''' \text{ Cotg. } \gamma'$$

$$= \frac{P(\text{Cotg. } \alpha' - \text{Cotg. } \gamma')}{M}$$

$$rt = \frac{P(\text{Cotg. } \beta' - \text{Cotg. } \gamma')}{M}$$

5) Aus der Proportion

$$gt : gw = \text{Sin. } (\beta' - \alpha') : \text{Sin. } \beta'$$

ergiebt sich nun

$$gw = \frac{P(\text{Cotg. } \alpha' - \text{Cotg. } \beta') \text{ Sin. } \beta'}{M \text{ Sin. } (\beta' - \alpha')}$$

$$= \frac{P}{M \text{ Sin. } \alpha'}$$

Eben so $gq = \dfrac{P}{M \text{ Sin. } \alpha'}$

Folglich ist $gw = gq.$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$tw = tl = \frac{P}{M \text{ Sin. } \beta'}$$

$$rq = rl = \frac{P}{M \text{ Sin. } \gamma'}$$

und die Puncte w, q, l vereinigen sich also in einem gemeinschaftlichen x.

6) Es ist $wg = \frac{P}{M \text{ Sin. } \alpha'}$ (siehe 5)

$$yg = \frac{m'}{\text{Sin. } \alpha'}$$

also $\quad wy$ oder $xy = wg - yg$

$$= \frac{P - M m'}{M \text{ Sin. } \alpha'}$$

$$= \frac{R \text{ Cotg. } \alpha \text{ Sin. } \alpha'}{M \text{ Sin. } \alpha'} \text{ (siehe 2)}$$

$$= \frac{R \text{ Cotg. } \alpha}{M}$$

folglich $xy \text{ tg. } \alpha = \frac{R \text{ Cotg. } \alpha}{M} \cdot \text{tg. } \alpha$

$$= \frac{R}{M}$$

Eben so $xp \text{ tg. } \beta = \frac{R}{M}$ u. s. w.

also $xy \text{ tg. } \alpha = xp \text{ tg. } \beta = xz \text{ tg. } \gamma = \frac{R}{M}$

$$= \frac{Aa + Bb + \ldots .}{A + B + \ldots .}$$

7) Es schneiden sich also die Richtungslinien der mittleren Kräfte alle in einem und denselben Punct, dessen normale Höhe über $\triangle$, nemlich $m = \frac{R}{M}$ ist. Die Ordinate von seiner Projection x auf $\triangle$ in Beziehung auf ,l ist

$$= wg \text{ Sin. } \alpha' = xg \text{ Sin. } \alpha' = \frac{P}{M};$$

und die zugehörige Abscisse von π aus ist

$$= {}_{,}m + m' \text{Cotg.} \alpha' - wg \text{Cos.} \alpha' = \frac{Q}{M}.$$

§. 2. Zusatz. Die Werthe $\frac{R}{M}$; $\frac{P}{M}$; $\frac{Q}{M}$ ergeben sich sehr leicht unmittelbar, wenn man sich die Kräfte 1stens parallel mit Δ; 2tens normal auf Δ wirkend denkt, und in diesem 2ten Fall einmal die Momente in Beziehung auf $_{,}l$; ein andermal in Beziehung auf l' nimmt; allein durch diese Bestimmung wäre der Lehrsatz nicht erwiesen, sondern bloß gezeigt, daß die Richtungslinien der mittleren Kraft bei drei auf einander senkrechten Lagen sich in einem und denselben Punct schneiden müssen.

§. 3. Erklärung. Wenn in einem festen System von Puncten jeder von der Kraft der Schwere angegriffen wird, so heißt der Punct, in welchem sich, für alle denkbare Lagen des Systems, sämtliche Richtungslinien der mittleren Kraft durchschneiden, der Schwerpunct dieses Systems. Im Allgemeinen heißt er, die Kräfte mögen herrühren von wo sie wollen, wenn sie nur immer nach parallelen Richtungslinien wirken, Mittelpunct des Drucks. Jede Linie, in welcher der Schwerpunct eines Systems liegt, heißt eine Schwerlinie desselben, und jede Ebene durch den Schwerpunct, eine Schwerebene.

§. 4. Zur Bestimmung des Schwerpuncts eines Systems, z. B. eines schweren Körpers, ergeben sich also außer den Formeln in §. 1 folgende 3 Gesetze:

1stens, er liegt im Durchschnittspunct zweier Schwerlinien.

2tens, er liegt im Durchschnittspunct einer Schwerebene und Schwerlinie.

3tens, er liegt im Durchschnittspunct dreier Schwerebenen.

§. 5. Lehrsatz. Wenn mehrere in einer Ebene liegende feste Puncte von der Schwere angegriffen werden, so liegt der Schwerpunct dieses Systems in derselben Ebene.

Beweis. Man denke sich die Ebene in verticaler Lage, so liegt für diese, die Richtung der mittleren Kraft ganz in der Ebene, also auch jeder Punct derselben in ihr, und folglich auch der Schwerpunct selbst.

§. 6. Lehrsatz. Wenn man ein System von festen Puncten, welche von der Schwere angegriffen werden, in unmittelbar an einander liegende Elemente zertheilt (etwa eine Ebene in lauter unmittelbar an einander liegende Parallellinien, oder einen Kreisausschnitt in lauter Elementar-Dreieckchen, die alle den Mittelpunct des Kreises zur Spitze, und das Element, welches jedesmal die zugehörige Tangente mit der Peripherie gemein hat, zur Grundlinie haben, oder einen Körper in lauter parallele Ebenen) und den Schwerpunct jedes solchen Elements (d. h. den Mittelpunct des Drucks aller der Wirkungen, welche in dieses Element fallen) sucht, so ist der Schwerpunct der Curve, welche die Schwerpuncte dieser Elemente, der Reihe-

folge nach, verbindet, zugleich der Schwerpunct des ganzen Systems.

Beweis. Man denke sich die Wirkungen, welche in jedes Element fallen, im Schwerpunct desselben vereint thätig, so fällt die Wahrheit der Behauptung in die Augen.

§. 7. Zusatz. Da nach §. 39 I. Bd der Schwerpunct einer geraden Linie, welche in allen ihren Puncten von gleichgroßen Gewichten ergriffen ist, d. h. also, einer schweren Linie, in ihrer Mitte liegt, so folgt nach dem vorigen §., daß also der Schwerpunct eines schweren ebenen Dreiecks (d. h. einer Dreiecks-Ebene, welche in allen ihren Puncten von gleichgroßen Gewichten angegriffen wird) in der geraden Verbindungslinie einer seiner Spitzen mit der Mitte der gegenüber liegenden Seite, der eines Prismens, in der geraden Verbindungslinie der Schwerpuncte seiner Grundfläche u. s. w. liegen muß.

§. 8. Aufgabe. Eine allgemeine Formel zur Bestimmung einer Schwerlinie für eine schwere Curve von einfacher Krümmung herzuleiten.

Auflösung. Man nehme beliebig in der Ebene der Curve eine Abscissenlinie a und in ihr irgendwo einen Anfangspunct der Abscissen an, setze irgend eine Abscisse $= x$, die zugehörige rechtwinklichte Ordinate $= y$ und die zugehörige Curve $= v$; ferner den Abstand der mit a parallelen Schwerlinie, von a, $= z$, so ist, wenn man die Momente auf a bezieht, und das Gewicht einer Längen-Einheit $= p$ setzt, das Moment

von $p\,dv = y \cdot p\,dv$; also das Moment von $v = p \int y\,dv$.

Da nun aber $p\,v$ das Gewicht von v ausdrückt, so ist also nach §. 1

$$Z = \frac{p \int y\,dv}{p\,v} \text{ oder}$$

$$Z = \frac{\int y\,dv}{v}.$$

§. 9. Aufgabe. Eine allgemeine Formel zur Bestimmung einer Schwerlinie für eine schwere Ebene herzuleiten.

Auflösung. Man denke sich in der Ebene lauter unmittelbar an einander liegende parallele Linien, setze eine derselben $= y$ und den Abstand derselben von irgend einer parallelen Linie a, $= x$; betrachte ferner p als Gewicht der Ebenen-Einheit; so ist das Gewicht des von y begränzten und abgeschnittenen Stücks der Ebene $= p \int y\,dx$ und in Beziehung auf a, das Moment des Elements $y\,dx$ gleich $x \cdot p\,y\,dx$; folglich das Moment des erwähnten Stücks der Ebene

$$= p \int x\,y\,dx.$$

Setzt man also den Abstand der mit a parallelen Schwerlinie dieses Ebenenstücks, von a gleich z; so ist

$$Z = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}.$$

§. 10. Zusatz. Hat die Curve *Fig.* 3 gleiche Aeste ab, ac und ist an ihre Achse, so liegt der Schwerpunct der Curve sowohl, als der von ihr und der rechtwinklichten Ordinate $bc = 2y$ begränzten

Ebene bac in an, und es ergiebt sich der Abstand des ersteren von a

$$= \frac{\int x\, dv}{v}$$

$$= \frac{\int x \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

und der des letzteren

$$= \frac{\int xy\, dx}{\int y\, dx}.$$

§. 11. Aufgabe. Den Schwerpunct der gewölbten Oberfläche eines Konoids zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich *Fig.* 3 die Ebene anb um an, so liegt nach §. 6 der Schwerpunct der gewölbten Oberfläche in an, und setzt man die Entfernung desselben von a = z; so ist das Moment der Zone $2 y \pi\, dv$, in Beziehung auf eine durch a mit y parallele Achse $= x . 2 y \pi\, dv$; daher das Moment der Oberfläche selbst

$$= 2\pi \int xy\, dv,$$

wenn man das Gewicht der Einheit des Flächen-Maaßes auch als Gewichts-Einheit annimmt. Das Gewicht der Oberfläche für diese Einheit ist aber

$$= 2\pi \int y\, dv, \text{ daher also}$$

$$z = \frac{\int xy\, dv}{\int y\, dv} \text{ oder}$$

$$z = \frac{\int xy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

§. 12. Aufgabe. Eine allgemeine Formel zur Bestimmung einer Schwerebene für einen schweren Körper, herzuleiten.

Auf-

Auflösung. Man denke sich durch den Körper parallele an einander liegende Ebenen gelegt; durch sie nehme man eine Normale als Abscissenlinie an, wähle in ihr einen beliebigen Punct a, als Anfangspunct der Abscissen, und setze auf ihr die Entfernung von a bis zu der mit jenen Ebenen parallelen Schwerebene des der Abscisse x zugehörigen Körpers, = z. Ferner sei die durch den Endpunct von x zu denkende auf x normale Durchschnittsebene des Körpers = y = φx, so ist in Beziehung auf eine durch a auf x normale Achse, das Moment der Schicht $\varphi x. dx$, wenn p das Gewicht der Körper-Einheit bezeichnet

$$= x. p \varphi x dx,$$

folglich das Moment des Körpers selbst

$$= p \int x \varphi x dx.$$

Da nun aber $p \int \varphi x dx$ das Gewicht des Körpers selbst ausdrückt, so hat man also

$$z = \frac{\int x \varphi x dx}{\int \varphi x dx}.$$

§. 13. Lehrsatz. Die gewölbte Oberfläche F jedes Konoids ist gleich dem Product aus der erzeugenden Curve v in den Kreisbogen, welchen der Schwerpunct von v bei dieser Drehung durchläuft.

Beweis. Der Drehungswinkel sei = α; sein Bogen für den Halbmesser 1 gleich φ; der Schwerpunct von v befinde sich in der Entfernung z von der Drehachse, so soll bewiesen werden, daß F = v. z. φ ist.

Es ist, wenn y die zum Endpunct von v gehörige, auf die Drehachse normale Ordinate bezeichnet,

$$F = \varphi \int y\,dv;$$

$$z = \frac{\int y\,dv}{v}; \text{ (§. 8)}$$

also der Bogen, welchen der Endpunct von z beschreibt, oder

$$z\varphi = \varphi \frac{\int y\,dv}{v}; \text{ folglich}$$

$$vz\varphi = \varphi \int y\,dv; \text{ daher}$$

$$F = vz\varphi.$$

§. 14. Lehrsatz. Der Cubic-Inhalt jedes Körpers, welcher durch Umdrehung einer Ebene E um eine in ihr, oder ihrer Verbreitung liegende feste Achse a erzeugt wird, ist gleich dem Product von E und dem Kreisbogen, welchen der Schwerpunct von E bei dieser Drehung durchläuft.

Beweis. Der Drehungswinkel sei $= \alpha$; sein Bogen für den Halbmesser 1 gleich φ; der Schwerpunct von E befinde sich in der Entfernung z von a: der Cubic-Inhalt des Konoids sei $=$ K; so soll bewiesen werden, daß $K = E.\, z\varphi$ ist.

Man nehme in E eine mit a parallele Ordinate $= y$ und ihre Entfernung von $a = x$ an; so ist

$$E = \int y\,dx \text{ für } x = a;$$

ferner nach §. 10

$$z = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}; \text{ für } x = a; \text{ daher}$$

$$E.\, z\varphi = \varphi \int xy\,dx.$$

Nun betrachte man den Theil eines Cylinder-Mantels $x\varphi . y$ als Begränzung des zu x und y und φ gehörigen Konoids, so ist

$$dK = \varphi x y d x; \text{ also}$$

$$K = \varphi \int x y d x; \text{ für } x = a; \text{ folglich}$$

$$K = E . z \varphi .$$

Anmerk. Dieses Gesetz ist unter dem Namen der Guldinl-schen Regel bekannt.

Des ersten Abschnitts erste Abtheilung.

Bestimmung der Schwerpuncte einiger Curven.

---

§. 15. Aufgabe. Den Schwerpunct eines schweren Kreisbogens zu bestimmen.

1ste Auflösung. Man denke sich mit der, dem Bogen zugehörigen Sehne a, einen parallelen Durchmesser gezogen, und bilde in Beziehung auf ihn die Momente, so hat man, *Fig.* 4,

$$z = \frac{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int \sqrt{dx^2 + dy^2}} .$$

Es ist aber, den Halbmesser $= r$ gesetzt,

$$y^2 = 2 r x - x^2; \text{ also}$$

$$dy^2 = \frac{(r - x)^2}{y^2}; \text{ folglich}$$

$$Z = \frac{\int \sqrt{y^2 + (r - x)^2} . dx}{v}$$

$$= \frac{r x + C}{v} .$$

Für $x = r - \frac{1}{2}a$ wird der Zähler $= 0$; also

$$z = \frac{rx - r(r - \frac{1}{2}a)}{v}.$$

Vollständig ist also für den Bogen b, der der Sehne a zugehört,

$$z = \frac{r(r + \frac{1}{2}a) - r(r - \frac{1}{2}a)}{b}$$

$$= \frac{ra}{b}$$

oder, wenn man für den Halbmesser $= 1$ den zu b gehörigen Bogen mit 2δ bezeichnet,

$$z = \frac{r. \text{Sin.}\,\delta}{\delta}.$$

Aus $z = \frac{r.a}{b}$ fließt das Gesetz: es verhält sich der Bogen zu seiner Sehne wie der Halbmesser zu der Entfernung des Schwerpuncts dieses Bogens vom Mittelpunct des zugehörigen Kreises.

2te Auflösung. Man denke sich den Bogen in lauter unendlich kleine, als geradlinigt, im letzten Augenblick des Verschwindens zu betrachtende, Stückchen cf, fg, gh u. s. w., *Fig.* 4, getheilt, und fälle aus ihren Mittelpuncten i, k, n etc. Normalen auf den mit der Sehne parallelen Durchmesser, so ist, wenn man das Gewicht eines solchen Elements $= \varphi$ setzt,

$$z = \frac{\varphi\, fc.\, im + \varphi.\, fg.\, kp + \varphi.\, gh.\, nq \text{ u. s. w.}}{\varphi.\, fc + \varphi.\, fg + \varphi.\, gh \text{ u. s. w.}}$$

$$= \frac{fc.\, im + fg.\, kp + gh.\, nq \text{ u. s. w.}}{fc + fg + gh \text{ u. s. w.}}$$

Es ist aber, wenn man gt ‡ der Sehne a, und ht normal darauf zieht, $\triangle\, hgt \backsim \triangle\, wnq$; folglich verhält sich $hg : gt = r : q$ und also $gh.\, nq = r.\, gt$.

Eben so ergiebt sich

$$gf.\,kp = f\beta.\,r.$$
$$fc.\,im = c\gamma.\,r$$

Es ist daher der Zähler des Werths für

$$Z = r\,(c\gamma + f\beta + gt + \text{u. s. w.}) = r.\,a$$

und der Nenner = dem Bogen zur Sehne a, = b;

folglich $$z = \frac{r.\,a}{b}.$$

§. 16. Aufgabe. Den Schwerpunct eines parabolischen Bogens, der Gleichung $y^2 = px$ entsprechend, anzugeben.

Auflösung. Es sei fg, *Fig.* 5, der schwere parabolische Bogen; n der Scheitelpunct der Parabel, also $a^2 = p.\,b$, folglich

$$p = \frac{a^2}{b};\quad y^2 = \frac{a^2}{b}\,x.$$

Ferner sei die Entfernung des Schwerpuncts dieses Bogens fg von einer Linie parallel mit y durch n gezogen = z; und von x = z'; so ist

$$z = \frac{\int x\,dv}{v} = \frac{\int x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Aus $y^2 = \frac{a^2}{b}\,x = px$ folgt

$$(dy)^2 = \frac{p}{4x}\cdot(dx)^2 \text{ oder } (dx)^2 = \frac{4x}{p}\,(dy)^2;$$

also ist

$$z = \frac{\int x^{\frac{1}{2}}.\sqrt{1 + \frac{4x}{p}}.\,dx}{\int x^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{1 + \frac{4x}{p}}.\,dx}$$

Setzt man nun $\frac{4x}{p} = \text{tg.}\,\varphi^2$; so wird

$$x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}.\ \text{tg.}\,\varphi;$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{p}}.\ \text{Cotg.}\,\varphi;$$

$$dx = \tfrac{1}{2}\,p\ \text{tg.}\,\varphi\ \text{Sec.}\,\varphi^2.\ d\varphi;$$

also

$$z = \frac{p}{4}.\ \frac{\int \frac{\text{Sin.}\,\varphi^2\, d\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi^5}}{\int \frac{d\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi^3}}$$

$$= \frac{p}{4}.\ \frac{(1+\text{Sin.}\,\varphi^2).\,\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{8\,\text{Cos.}\,\varphi^4} - \frac{1}{8}\ln \text{tg.}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{2\,\text{Cos.}\,\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln \text{tg.}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

Es ist aber $\text{tg.}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = \text{tg.}\,\varphi + \text{Sec.}\,\varphi$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{p}} + \sqrt{1 + \frac{4x}{p}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{p+4x}}{\sqrt{p}};\ \text{also}$$

$$z = \tfrac{1}{16}\,p.\ \frac{\text{tg.}\,\varphi\,\text{Sec.}\,\varphi\,(\text{tg.}\,\varphi^2 + \text{Sec.}\,\varphi^2) - \ln(\text{tg.}\,\varphi + \text{Sec.}\,\varphi) + C}{\text{tg.}\,\varphi\ \text{Sec.}\,\varphi + \ln(\text{tg.}\,\varphi + \text{Sec.}\,\varphi) + C}$$

$$= \tfrac{1}{16}\,p.\ \frac{2.\ \frac{p+8x}{p^2}\sqrt{px+4x^2} - \ln\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{p+4x}}{\sqrt{p}} + C}{\frac{2}{p}\cdot\sqrt{px+4x^2} + \ln\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{p+4x}}{\sqrt{p}} + C}$$

Für $x = b$ muß sowohl der Zähler als der Nenner $= 0$ werden, und hieraus ergeben sich beide Constanten, und somit der vollständige Werth für z.

Für $b = 0$ werden die Constanten beide $= 0$. Eben so findet man z'; aus

$$z' = \frac{\int y\,dv}{v};$$

wo für den Zähler der einfache Ausdruck

$$\frac{(p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{12p} \text{ entsteht.}$$

§. 17. Aufgabe. Den Schwerpunct eines cycloidischen Bogens, der Gleichung

$$y = \sqrt{2rx - x^2} + r \text{ Arc. Cos. } \frac{r - x}{r}$$

oder der $y = r \text{ Sin. } \beta + r\beta$ entsprechend, anzugeben. *Fig.* 6.

Auflösung. Es ist

$$z = \frac{\int y\, dv}{\int dv}.$$

Weil nun $dy = \sqrt{\frac{2r - x}{x}}.\, dx$ und

$dv = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so entsteht

$dv = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}.\, dx$; folglich

$$z = \frac{\int y.\, x^{-\frac{1}{2}}.\, dx}{\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx} = \frac{\int y\, dx^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{y\sqrt{x} - \int \sqrt{x}.\, dy}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{y\sqrt{x} - \int \sqrt{2r - x}.\, dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{y\sqrt{x} + \frac{2}{3}(2r - x)^{\frac{3}{2}} + C}{\sqrt{x} + C}.$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ muß sowohl der Zähler als der Nenner $= 0$ werden, woraus die Constanten sich ergeben. Es entsteht daher

$$z = y - \frac{2}{3\sqrt{x}}\left[2r\sqrt{2r} - (2r - x)\sqrt{2r - x}\,\right].$$

Für $x = 2r$ und $y = r\pi$ erhält man

$$Z = r\pi - \tfrac{4}{3} r = (\pi - \tfrac{4}{3})\, r = 1,808 \ldots r.$$

Eben so ist

$$z' = \frac{2\int x\,dv}{2v}$$

$$= \frac{\int x^{\frac{1}{2}}\,dx}{\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx} = \tfrac{1}{3}x; \text{ also}$$

für $x = 2r$ $\qquad z' = \tfrac{2}{3}r.$

Des ersten Abschnitts zweite Abtheilung.

Bestimmung der Schwerpuncte einiger ebenen Figuren.

---

§. 18. Aufgabe. Den Schwerpunct des schweren Dreiecks zu bestimmen.

1ste Auflösung. Eine der Seiten, *Fig.* 7, sei $= a$; die zugehörige Höhe, a als Grundlinie angesehen, $= h$. Man betrachte e als eine unendlich kleine oder verschwindende Länge, und setze $a = n.e$; $h = me$ und das Gewicht eines solchen Punctes e, gleich p; so ist, wenn man sich das Dreieck aus lauter Parallelen mit a, bestehend denkt, das Gewicht der nächsten Linie an a gleich. $\frac{m-1}{m}$ nep; der folgenden

$$= \frac{m-2}{m} \cdot nep$$

u. s. w.; folglich die Summe aller parallelen Kräfte

$$= ep\left(\frac{n}{m}\cdot m + \frac{n}{m}(m-1) + \frac{n}{m}(m-2) + \dots + \frac{n}{m}[m-(m-1)]\right)$$

$$= \frac{n}{m} ep (m + m - 1 + \ldots + 1)$$

$$= nep. \frac{m+1}{2}.$$

Ferner ist das Moment der nächsten Linie an a, Beziehung auf a

$$= e. \frac{m-1}{m} nep; \text{ der folgenden}$$

$$= 2e. \frac{m-2}{m} nep; \text{ u. s. w.}$$

Demnach die Summe der Momente

$$= e^2 p \left(\frac{n}{m} (m-1) + \frac{2n}{m} (m-2) + \ldots + \frac{(m-1)n}{m} [m-(m-1)] \right)$$

$$= \frac{n}{m} e^2 p \Big(m (1 + 2 + 3 + \ldots + m - 1) - [1 + 4 + 9 + \ldots + (m-1)^2] \Big)$$

$$= \frac{n}{m} e^2 p. \left(m. \frac{m(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \right)$$

$$= \frac{ne^2 p (m-1)(m+1)}{6}.$$

Wird nun die Entfernung des Schwerpuncts des Dreiecks von a = z gesetzt, so hat man

$$z = \frac{ne^2 p (m-1)(m+1)}{6} : \frac{nep (m+1)}{2}$$

$$= \frac{em - e}{3} = \frac{h - e}{3}.$$

Es ist aber $e = \frac{1}{\infty}$; also

$$z = \frac{h}{3}.$$

2te Auflösung. Man bezeichne *Fig.* 7 eine Parallele mit a, in der Entfernung x, mit y, so ist

$\int x\,y\,dx$ das Moment des Trapezes zwischen a und y in Beziehung auf a; also

$$z = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}.$$

Es ist aber $a : y = h : h - x$; daher

$$z = \frac{\int (h\,x - x^2)\,dx}{\int (h - x)\,dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} h\,x^2 - \frac{1}{3} x^3}{h\,x - \frac{1}{2} x^2}$$

$$= \frac{3\,h\,x - 2\,x^2}{6\,h - 3\,x}$$ oder für $x = h$,

$$z = \frac{1}{3} h.$$

3te Auflösung. Man halbire zwei der Seiten ab, bc, *Fig.* 8, des Dreiecks abc in d, f, und ziehe aus diesen Puncten nach den gegenüber liegenden Ecken c, a gerade Linien, so ist ihr Durchschnittspunct g der verlangte Schwerpunct nach §. 6. Weil nun $bd : ba = bf : bc = 1 : 2$; so ist $df \ddagger ac$; also $\triangle\, dfg \backsim acg$; folglich

$$fg : ga = fd : ca$$
$$= fb : cb$$
$$= 1 : 2, \text{ daher}$$
$$fa : fg = 3 : 1; \text{ also}$$
$$fg = \tfrac{1}{3}\, fa, \text{ und eben so}$$
$$dg = \tfrac{1}{3}\, dc.$$

4te Auflösung. Soll die Entfernung z des Schwerpuncts eines Dreiecks ABC, *Fig.* 9, von irgend einer Ebene VW durch die Abstände a, b, c der 3 Ecken dieses Dreiecks von dieser Ebene VW bestimmt werden, so hat man, wenn eine der Seiten,

etwa AB in F halbirt, FC gezogen und $FG = \frac{1}{3} FC$ gemacht wird, so daß G der Schwerpunct des Dreiecks ist: die Normale $FF' = \frac{a+b}{2}$, und die $GG' = z = FF' + \frac{1}{3}(c - FF')$; oder $z = c + \frac{2}{3}(FF' - c)$; je nachdem $c > FF'$ oder $c < FF'$ ist. Setzt man nun für FF' seinen Werth, so entsteht

$$z = \frac{a+b+c}{3}.$$

§. 19. Aufgabe. Den Schwerpunct eines Parallelograms anzugeben.

Auflösung. Der Schwerpunct desselben liegt, da beide Diogonalen eines Parallelograms sich halbiren, nach §. 6 in den Durchschnittspunct derselben.

§. 20. Aufgabe. Den Schwerpunct eines Trapezes zu bestimmen.

1ste Auflösung. Es bezeichnen, *Fig.* 10, a und b die parallelen Seiten, h ihren normalen Abstand, so ist, wenn man die Entfernung des gesuchten Schwerpuncts von a mit z bezeichnet, und mit fg die Parallele dk zieht, in Beziehung auf a, das Moment des Parallelograms $dkgf = bh. \frac{1}{2} h$, und das des Dreiecks $cdk = \frac{a-b}{2} h. \frac{1}{3} h$, folglich die Summe $= \frac{h^2}{6}(a + 2b)$; daher

$$z = \frac{\frac{1}{6} h^2 (a + 2b)}{\frac{a+b}{2} . h} \text{ oder}$$

$$z = \frac{1}{3} h. \frac{a+2b}{a+b}.$$

Errichtet man nun auf a in c eine Normale und setzt den Abstand des Schwerpuncts des Trapezes von dieser Linie = z'; fällt dann dn und fw normal auf a und setzt cn = e; so hat man die Summe der Momente in Beziehung auf die Normale

$$= \frac{eh}{2} \cdot \tfrac{2}{3} e + bh \left(e + \tfrac{1}{2} b\right) +$$

$$\frac{a-b-e}{2} h \left(e + b + \frac{a-b-e}{3}\right)$$

$$= \frac{h}{6} \left[(a+b)(a+e) + b(b+e)\right];$$

folglich

$$z' = \frac{\frac{h}{6} \left[(a+b)(a+e) + b(b+e)\right]}{\frac{a+b}{2} \cdot h}$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \left(a + e + b \, \frac{b+e}{a+b}\right)$$

Fällt c in n, ist also e = o; so wird

$$z' = \tfrac{1}{3} \left(a + \frac{b^2}{a+b}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} \, \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}.$$

2te Auflösung. Durch Zeichnung.

Man zerlege das Trapez durch eine Digonale in 2 Dreiecke, suche jedes Dreiecks Schwerpunct, und verbinde beide durch eine gerade Linie, so ist dies eine Schwerlinie des Trapezes. Nun halbire man beide parallele Seiten desselben, und verbinde die Halbirungspuncte durch eine gerade Linie, so ist dies nach §. 6 ebenfalls eine Schwerlinie für dasselbe, und im

Durchschnittspunct beider liegt also der verlangte Schwerpunct.

§. 21. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder geradlinigten ebenen Figur anzugeben.

1ste Auflösung. Man theile durch Parallellinien A, B, C, D, ... Y, Z *Fig.* 11, deren Anzahl $= n + 1$ sein mag, die Figur in lauter Trapeze, und setze ihre Höhen nach der Reihe $= a, b, c, d, \ldots x, y$; so ist deren Anzahl $= n$; und es ist, wenn man die Momente in Beziehung auf A macht, die Summe derselben

$$= \frac{A + B}{2}\, a.\ \tfrac{1}{3}\, a.\ \frac{A + 2B}{B + B}$$

$$+ \frac{B + C}{2}\, b.\ \left(a + \tfrac{1}{3}\, b.\ \frac{B + 2C}{B + C}\right)$$

$$+ \frac{C + D}{2}.\ c.\ \left(a + b + \tfrac{1}{3}\, c.\ \frac{C + 2D}{C + D}\right) + \text{u.s.w.}$$

$$+ \frac{X + Y}{2}\, x\, \left(a + b + \ldots + w + \tfrac{1}{3}x.\ \frac{X + 2Y}{X + Y}\right)$$

$$+ \frac{Y + Z}{2}\, y\, \left(a + b + \ldots + x + \tfrac{1}{3}y\ \frac{Y + 2Z}{Y + Z}\right)$$

oder wenn man zur Verkürzung die Summe $a^2 A + b^2 B + c^2.C + \ldots + x^2 X + y^2 Y$ mit M; die $a^2 B + b^2 C + c^2 D + \ldots + x^2 Y + y^2.Z$ mit N; und die $ab\,(B + C) + (a + b)\,c\,(C + D)$

$$+ (a + b + c)\,d\,(D + E) + \ldots$$

$$+ (a + b + \ldots + x)\,y\,(Y + Z)$$

mit P bezeichnet, so hat man die Summe der Momente

$$= \tfrac{1}{6}\,(M + 2N + 3P).$$

Weil nun der ganze Flächenraum
$= \frac{1}{2} [a(A+B) + b(B+C) + \ldots + y(Y+Z)]$
ist, so ergiebt sich also der Abstand des Schwerpuncts der ganzen Figur von A; oder $z =$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{M + 2N + 3P}{a(A+B) + b(B+C) + \ldots + y(Y+Z)}.$$

Eben so kann man seine Entfernung von jeder andern Seite finden.

Ist $a = b = c =$ u. s. w. $= y$ und setzt man diese Größe $= \alpha$; so wird

$$M = \alpha^2 (A + B + C + \ldots + X + Y);$$
$$2N = \alpha^2 (2B + 2C + \ldots + 2Y + 2Z);$$
$$3P = 3\alpha^2 [B + 3C + 5D + \ldots + (2n-5)X + (2n-3)Y + (n-1)Z]$$

folglich $M + 2N + 3P =$
$$\alpha^2 [A + 6B + 12C + \ldots + 6(n-2)X + 6(n-1)Y + (3n-1).Z].$$

Ferner ergiebt sich, für den Nenner, des Ausdrucks für z, folgender:
$$\alpha (A + 2B + 2C + \ldots + 2X + 2Y + Z)$$
und also hat man in diesem Fall
$$z = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{A + (3n-1)Z + 6[B + 2C + 3D + \ldots + (n-2)X + (n-1)Y]}{A + Z + 2(B + C + D + \ldots + X + Y)}$$
welche Formel zur näherungsweisen Bestimmung des Schwerpuncts einer krumlinigten, keinem Gesetz unterworfenen, Ebene dienen kann. Sie kommt der Wahrheit desto näher, je kleiner man α nimmt.

Wählt man die Lage der Durchschnittslinie, auf welcher die Theile α genommen werden, so, daß A

und Z Eckpuncte werden, so hat man $A = 0$ und $Z = 0$ und es entsteht die leichte Formel

$$Z = \alpha \frac{B + 2C + 3D \ldots + (n-2)X + (n-1)Y}{B + C + D + \ldots + X + Y}.$$

2te Auflösung. Durch Zeichnung.

a) Für ein Viereck.

Man ziehe eine Diagonale, suche die Schwerpuncte beider entstehenden Dreiecke und verbinde dieselbe durch eine gerade Linie, so ist dies eine Schwerlinie des Vierecks. Eben so suche man mit Hülfe der andern Diagonale eine 2te Schwerlinie desselben, so giebt der Durchschnittspunct beider den verlangten Schwerpunct.

b) Für ein Fünfeck.

Man zerlege dasselbe zweimal durch eine Diagonale in ein Dreieck und in ein Viereck, suche in beiden Fällen die Schwerpuncte dieser beiden Figuren und verbinde sie durch eine gerade Linie, so hat man zwei Schwerlinien und somit auch den Schwerpunct des Fünfecks.

c) Für ein Sechseck.

Man zerlege dasselbe zweimal in ein Dreieck und ein Fünfeck u. s. w.

Es fällt in die Augen wie man auf diesem Wege den Schwerpunct jeder geradlinigten Figur durch bloße Zeichnung zu bestimmen im Stande ist.

§. 22. Den Schwerpunct eines Kreis-Ausschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Es bezeichne r den Halbmesser;

2δ den zum Mittelpunctswinkel gehörigen Bogen für den Halbmesser $= 1$; z die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpunct des zugehörigen Kreises. Der gesuchte Schwerpunct liegt in dem Halbmesser, welcher 2δ halbirt und fällt nach §. 18 mit dem des Bogens zusammen, der aus dem Mittelpunct mit $\frac{2}{3}r$ beschrieben wird, weil man sich den Ausschnitt aus lauter Elementar-Dreieckchen bestehend denken kann. (§. 6). Es ist also nach §. 15

$$z = \frac{2}{3} r . \frac{a}{b} \text{ oder}$$

$$z = \frac{2}{3} r . \frac{\text{Sin. } \delta}{\delta} .$$

Für $\delta = \frac{1}{2}\pi$ oder für den Halbkreis folgt hieraus

$$z = \frac{4r}{3\pi} .$$

§. 23. **Aufgabe.** Den Schwerpunct eines concentrischen Ringstücks zu bestimmen.

Auflösung. Es bezeichne r den äußern, ϱ den inneren Halbmesser; 2δ den zum Mittelpunctswinkel gehörigen Bogen für den Halbmesser $= 1$; so ist die Fläche des großen Ausschnitts $= r^2\delta$; die des kleinen $= \varrho^2 . \delta$, also die des Ringsstücks $= (r^2 - \varrho^2) . \delta$. Halbirt man nun 2δ durch nm, *Fig.* 12; betrachtet a als Schwerpunct von $r^2 . \delta$; b als den von $\varrho^2 \delta$ und c als den von $(r^2 - \varrho^2)\delta$ und setzt $nc = z$, so hat man 3 parallel thätige Kräfte im Gleichgewicht; nemlich $\varrho^2\delta$ in b; $(r^2 - \varrho^2)\delta$ in c; und $- r^2\delta$ in a und also die Gleichung

$$\varrho^2 \delta . bn + (r^2 - \varrho^2)\delta . z - r^2 \delta . an = 0.$$

Hier-

Hieraus ergiebt sich, weil nach §. 22

$$bn = \frac{2}{3} \varrho \frac{\text{Sin.}\,\delta}{\delta};$$

$$an = \frac{2}{3} r \frac{\text{Sin.}\,\delta}{\delta} \text{ ist,}$$

$$z = \frac{2}{3} \frac{\text{Sin.}\,\delta}{\delta} \cdot \frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2}; \text{ oder auch}$$

$$z = \frac{2}{3} \frac{\text{Sin.}\,\delta}{\delta} \cdot \frac{r^2 + \varrho^2 + r\varrho}{r + \varrho}.$$

§. 24. **Aufgabe.** Den Schwerpunct eines Kreis-Abschnitts zu bestimmen.

1ste **Auflösung.** Nach §. 9 und 10 hat man die Entfernung seines Schwerpuncts von a, *Fig.* 3; oder $z = \frac{2\int x y d x}{2 \int y d x}$; oder wenn man die Fläche des Abschnitts A nennt,

$$z = \frac{2\int x y d x}{A}.$$

Es ist aber, wenn man den Halbmesser mit r und den Bogen für den Halbmesser 1 zum Mittelpunctswinkel zu 2y, mit 2δ bezeichnet,

$$y = r \text{ Sin.}\,\delta$$

$$x = r(1 - \text{Cos.}\,\delta); \text{ also}$$

$$z = \frac{2r^3 \int - \text{Sin.}\,\delta\,(1 - \text{Cos.}\,\delta)\, d\,\text{Cos}\,\delta}{A}$$

$$= \frac{2r^3 (\int \text{Sin.}\,\delta^2\, d\,\delta - \int \text{Sin.}\,\delta^2\, d\,\text{Sin.}\,\delta)}{A}$$

$$= \frac{2r^3 (\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\delta - \frac{1}{3}\text{Sin.}\,\delta^3)}{A}$$

Es ist aber $A = r^2 \delta - r^2 \text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\delta$; also

$$z = r\left(1 - \frac{2}{3} \frac{\text{Sin.}\,\delta^3}{\delta - \text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\delta}\right)$$

und die Entfernung w des Schwerpuncts vom Mittelpunct des Kreises $= r - z$; oder

$$w = \tfrac{2}{3} r \frac{\text{Sin. } \delta^3}{\delta - \text{Sin. } \delta \text{ Cos. } \delta}.$$

Bezeichnet man die den Abschnitt begränzende Sehne mit a; so hat man $a = 2 r \text{ Sin. } \delta$; folglich

$$w = \tfrac{1}{12} \cdot \frac{8 r^3 \text{ Sin. } \delta^3}{r^3 (\delta - \text{Sin. } \delta \text{ Cos. } \delta)} \text{ oder}$$

$$w = \frac{a^3}{12 A}.$$

Für den Halbkreis folgt hieraus

$$w = \frac{(2 r)^3}{12 \cdot \frac{1}{2} r^2 \pi} = \frac{4}{3 \pi} \cdot r.$$

2te Auflösung. Nimmt man *Fig.* 13 den Schwerpunct des Kreisausschnitts in b; den des Abschnitts in c und den des Ergänzungsdreiecks in f an, so hat man

$$r^2 (\delta - \text{Sin. } \delta \text{ Cos. } \delta). cn + r^2 \text{ Sin. } \delta \text{ Cos. } \delta. fn$$
$$- r^2 \delta. bn = 0; \text{ oder}$$

$$A. w + r^2 \text{ Sin. } \delta \text{ Cos. } \delta. \tfrac{2}{3} r \text{ Cos. } \delta = r^2 \delta. \tfrac{2}{3} r \frac{\text{Sin. } \delta}{\delta}$$

also $$w = \tfrac{2}{3} r^3 \text{ Sin. } \delta. \frac{1 - \text{Cos. } \delta^2}{A}$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \frac{(r \text{ Sin. } \delta)^3}{A} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{(\frac{1}{2} a)^3}{A}$$

$$= \frac{a^3}{12 A}.$$

§. 25. Aufgabe. Den Schwerpunct eines parabolischen Abschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Es sei abc *Fig.* 14 ein solcher Abschnitt: man ziehe mit der begränzenden Sehne ac innerhalb des Abschnitts eine parallele Sehne, halbire

beide und verbinde die Halbirungspuncte durch eine gerade Linie fg, so ist fg eine Schwerlinie des Abschnitts, denn sie halbirt nach bekannten Eigenschaften der Parabel alle mit ac parallelen Sehnen. Setzt man nun fn = x; an = nc = y; ang = φ; den Parameter = p; nimmt k als den verlangten Schwerpunct an, und bezeichnet fk mit z, so ist

$$z = \frac{\int x\,2\,y.\,dx.\,\mathrm{Sin}.\,\varphi}{\int 2\,y\,dx\,\mathrm{Sin}.\,\varphi} = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}.$$

Es ist aber $y^2 = \frac{p}{\mathrm{Sin}.\,\varphi^2}.\,x$; folglich $z = \frac{3}{5}\,x$.

§. 26. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder krummlinigten, keinem Gesetz unterworfenen Figur zu bestimmen.

Auflösung. Genauere Bestimmung als in §. 21. Man theile *Fig.* 15 durch Parallellinien A; B; C; D u. s. w. X; Y; Z; in gleichen Abständen = α gezogen, die ganze Figur in eine gerade Anzahl = n von Streifen und betrachte den Raum zwischen A und C, so wie den zwischen C und E, zwischen E und G u. s. w. als bestehend aus einem Trapez, ± zweien parabolischen Abschnitten, so ist der Raum zwischen A und C

$$= \frac{A + C}{2}.\,2\,\alpha + \frac{2}{3}.\,2\,\alpha.\,ab + \frac{2}{3}.\,2\,\alpha.\,cd$$
$$= \frac{1}{3}\,\alpha\,[3A + 3C + 4\,(ab + cd)]$$
$$= \frac{1}{3}\,\alpha\,[3A + 3C + 4\,(B - \frac{A + C}{2})]$$
$$= \frac{1}{3}\,\alpha.\,(3A + 3C + 4B - 2A - 2C)$$
$$= \frac{1}{3}\,\alpha\,(A + 4B + C).$$

Der zwischen C und E

$$= \frac{C+E}{2} . 2\alpha + \tfrac{2}{3} . 2\alpha . gh - \tfrac{2}{3} . 2\alpha . ef$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha [3C + 3E + 4 (ef + D - eg) - 4 . ef]$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha [3C + 3E + 4 (D - \frac{C+E}{2})]$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (3C + 3E + 4D - 2C - 2E)$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (C + 4D + E).$$

Der zwischen E und G

$$= \frac{E+G}{2} . 2\alpha - \tfrac{2}{3} . 2\alpha . ik - \tfrac{2}{3} . 2\alpha . mr$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha [3E + 3G - 4 (ik + mr)]$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha [3E + 3G - 4 (\frac{E+G}{2} - F)]$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (3E + 3G + 4F - 2E - 2G)$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (E + 4F + G)$$

u. s. w.; endlich der zwischen X und Z

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (3X + 3Z + 4Y - 2X - 2Z)$$

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (X + 4Y + Z);$$

folglich ist die ganze Ebene

$$= \tfrac{1}{3}\alpha (A + 4B + 2C + 4D + 2E + \ldots + 2X + 4Y + Z).$$

Macht man nun die Momente in Beziehung auf A, so hat das erste Trapez $\tfrac{1}{3}\alpha (3A + 3C)$ den Hebelsarm $\tfrac{1}{3} . 2\alpha . \frac{A + 2C}{A + C}$; also das Moment

$$= \tfrac{1}{3}\alpha^2 (2A + 4C)$$

und die beiden parabolischen Abschnitte

$$\tfrac{1}{3}\alpha (4B - 2A - 2C)$$

haben den Hebelsarm α; also das Moment

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2 (4B - 2A - 2C);$$

und folglich ist das Moment der ersten beiden Streifen

$$\frac{1}{3}\alpha^2 (4B + 2C).$$

Ferner hat das zweite Trapez $\frac{1}{3}\alpha(3C + 3E)$ den Hebelsarm $2\alpha + \frac{1}{3}.\ 2\alpha.\ \frac{C + 2E}{C + E}$; also das Moment $= \frac{1}{3}\alpha^2 (6C + 6E + 2C + 4E)$

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 (8C + 10E)$$

und die algebraische Summe beider parabolischen Abschnitte $= \frac{1}{3}\alpha (4D - 2C - 2E)$

hat den Hebelsarm 3α; folglich das Moment

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 (12D - 6C - 6E).$$

Es ist daher das Moment des 3ten und 4ten Streifens $= \frac{1}{3}\alpha^2 (2C + 12D + 4E)$.

Eben so ergiebt sich das Moment des 5ten und 6ten Streifens $= \frac{1}{3}\alpha^2 (4E + 20F + 6G)$;

das des 7ten und 8ten

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 (6G + 28H + 8J)$$

u. s. w.; endlich das der beiden letzten, oder des $n - 1$ten und $n$ten

$$= \frac{1}{3}\alpha (3X + 3Z).\ [(n-2)\alpha + \frac{1}{3} 2\alpha.\ \frac{X + 2Z}{X + Z}]$$

$$+ \frac{1}{3}\alpha (4Y - 2X - 2Z).\ (n - 1)\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 [(n - 2) X + (n - 1) 4Y + nZ].$$

Man hat also die algebraische Summe aller Momente

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 [0.A + 1.4B + 2.2C + 3.4D + 4.2E + 5.4F$$
$$+ 6.2G + \ldots (n-2).2X + (n-1)4Y + nZ].$$

Setzt man nun die Entfernung des Schwerpuncts der ganzen Figur von A gleich z, so hat man also

$$z = \alpha . \frac{0.A + 1.4B + 2.2C + 3.4D + \ldots + (n-2)2X + (n-1)4Y + nZ}{A + 4B + 2C + 4D + \ldots + 2X + 4Y + Z}$$

in welcher Formel das Gesetz leicht zu erkennen ist.

Die gefundene Formel läßt sich auch folgendergestalt schreiben:

$$z = \alpha . \frac{nZ + 2.[1.2B + 2.C + 3.2D + \ldots + (n-2)X + (n-1)2Y]}{A + Z + 2(2B + C + 2D + \ldots + X + 2Y)}$$

Wählt man die Abscissenlinie so, daß A = 0 und Z = 0 wird, so entsteht

$$z = \alpha . \frac{1.2B + 2.C + 3.2D + 4E + \ldots + (n-3)2W + (n-2)X + (n-1)2Y}{2B + C + 2D + E + \ldots + 2W + X + 2Y}.$$

Beispiel. Ist $\alpha = 1$; $n = 6$; $A = 2$; $B = 5$; $C = 6$; $D = 8$; $E = 9$; $F = 10$; $G = 9$; so ergiebt sich

$$z = \frac{917}{261} = 3,513 \ldots$$

Nach der Näherungs-Formel in §. 21. entsteht

$$z = \frac{466}{133} = 3,503 \ldots$$

§. 27. Aufgabe. Den Schwerpunct eines elliptischen Abschnitts zu bestimmen.

Auflösung. 1stens wenn der Scheitelpunct desselben im Endpunct der großen Achse liegt.

Es ist, wenn man die Entfernung von n *Fig.* 16 bis zum Schwerpunct, welcher in der großen Achse = a liegen muß, mit z bezeichnet

$$z = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}a - x = u$; so ist

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - u^2},$$

und wird $u = \frac{1}{2} a \text{ Sin. } \beta$ genommen, so ist der Zähler des Werths für z, also das Moment des Abschnitts

$$= - \frac{1}{8} a^2 c \left(\int \text{Cos.} \beta^2 \, d\beta + \int \text{Cos.} \beta^2 \, d \text{ Cos.} \beta\right)$$

$$= - \frac{1}{48} a^2 c \left(3 \text{ Arc. Sin. } \frac{2u}{a} + 3 \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } \beta + 2 \text{ Cos. } \beta^3\right) + C.$$

Für $u = \frac{1}{2} a$ wird $x = 0$; $\beta = \frac{1}{2} \pi$; und das Moment $= 0$; also

$$C = \frac{1}{48} a^2 c . 3 . \frac{1}{2} \pi;$$

daher der Zähler vollständig

$$= \frac{1}{48} a^2 c \left(3 \text{ Arc. Cos. } \frac{2u}{a} - \frac{6au + 2a^2 - 8u^2}{a^3} \sqrt{a^2 - 4u^2}\right)$$

Der vollständige Nenner ergiebt sich

$$= \frac{1}{8} a c \left(\text{Arc. Cos. } \frac{2u}{a} - \frac{2u}{a^2} . \sqrt{a^2 - 4u^2}\right); \text{ folglich}$$

$$z = \frac{1}{6} a . \frac{3 \text{ Arc. Cos. } \frac{2u}{a} - \frac{6au + 2a^2 - 8u^2}{a^3} \sqrt{a^2 - 4u^2}}{\text{Arc. Cos. } \frac{2u}{a} - \frac{2u}{a^2} . \sqrt{a^2 - 4u^2}}$$

Für $u = 0$ folgt hieraus

$$z = \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)$$

und es ist daher die Entfernung des Schwerpuncts der halben Ellipse von ihrem Mittelpunct

$$= \frac{2a}{3\pi} = \frac{4 . \frac{1}{2} a}{3\pi} .$$

Man vergleiche diese Formel mit der in §. 22. für den Halbkreis.

2tens. Liegt der Scheitelpunct des ellip-

tischen Abschnitts im Endpunct m der kleinen Achse = c; so hat man, eben so, allgemein:

$$z = \tfrac{1}{6} c. \frac{3 \,\text{Arc. Cos.} \frac{2u}{c} - \frac{6cu + 2c^2 - 8.u^2}{c^3} \sqrt{c^2 - 4u^2}}{\text{Arc. Cos.} \frac{2u}{c} - \frac{2u}{c^2} \sqrt{c^2 - 4u^2}}$$

und für u = 0

$$z = \tfrac{1}{2} c. \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right);$$

also die Entfernung vom Mittelpunct der Ellipse bis zum Schwerpunct

$$= \frac{4 \cdot \frac{1}{2} c}{3\pi}.$$

§. 28. Den Schwerpunct eines cycloidischen Abschnitts nmf *Fig.* 17 zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$z' = \frac{\int xydx}{\int ydx}.$$

Weil $y = r \,\text{Sin.}\, \beta + r\beta$; $x = r - r \,\text{Cos.}\, \beta$ ist, so hat man den Zähler

$$= r^3 \int (1 - \text{Cos.}\, \beta)(\text{Sin.}\, \beta + \beta) \,\text{Sin.}\, \beta \, d\beta$$

$$= r^3 \int (\text{Sin.}\, \beta^2 + \beta \,\text{Sin.}\, \beta - \text{Sin.}\, \beta^2 \,\text{Cos.}\, \beta - \beta \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Cos.}\, \beta)\, d\beta$$

$$= r^3 (\int \text{Sin.}\, \beta^2 d\beta + \int \beta \,\text{Sin.}\, \beta \, d\beta - \int \text{Sin.}\, \beta^2 \, d\text{Sin.}\, \beta - \tfrac{1}{8} \int 2\beta \,\text{Sin.}\, 2\beta.\, d2\beta)$$

$$= r^3 (\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2} \text{Sin}\, \beta \,\text{Cos}\, \beta - \beta \,\text{Cos}\, \beta + \text{Sin}\, \beta - \tfrac{1}{3} \text{Sin}\, \beta^3 + \tfrac{1}{8}.\, 2\beta \,\text{Cos.}\, 2\beta - \tfrac{1}{8} \text{Sin.}\, 2\beta) + C$$

$$= \tfrac{1}{12} r^3 [6\beta - 9 \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Cos.}\, \beta - 12\beta \,\text{Cos.}\, \beta + 12 \,\text{Sin.}\, \beta - 4 \,\text{Sin.}\, \beta^3 + 3\beta(2 \,\text{Cos.}\, \beta^2 - 1)] + C$$

$$= \tfrac{1}{12} r^3 [(3 - 12 \,\text{Cos.}\, \beta + 6 \,\text{Cos.}\, \beta^2)\, \beta + (12 - 9 \,\text{Cos.}\, \beta - 4 \,\text{Sin.}\, \beta^2)\, \text{Sin.}\, \beta] + C.$$

Für $\beta = 0$ wird der Zähler und auch C gleich 0; folglich ist der Ausdruck schon vollständig. Durch x oder $r - x = u$ ausgedrückt, wird er

$$= \tfrac{1}{12}.\ [(r^2 - 4ru + 2u^2)\ 3r\ \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r}$$
$$+ (8r^2 - 9ru + 4u^2)\sqrt{r^2 - u^2}\ ].$$

Der Nenner ist

$$= r^2 \int (\beta + \text{Sin.}\,\beta)\ \text{Sin.}\,\beta\, d\beta$$
$$= r^2 (\int \text{Sin.}\,\beta^2\, d\beta - \int \beta\, d\,\text{Cos.}\,\beta)$$
$$= r^2 (\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\beta - \beta\,\text{Cos.}\,\beta + \int \text{Cos.}\,\beta\, d\beta)$$
$$= r^2 (\tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\text{Sin.}\,\beta\ \text{Cos.}\,\beta - \beta\,\text{Cos.}\,\beta + \text{Sin.}\,\beta) + C$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 [(1 - 2\,\text{Cos}\,\beta)\ \beta + (2 - \text{Cos.}\,\beta)\ \text{Sin.}\,\beta] + C$$

Für $\beta = 0$ wird der Nenner und auch $C = 0$; und und es entsteht vollständig: Nenner

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{r - 2u}{r}\ \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r} + \frac{2r - u}{r^2}\sqrt{r^2 - u^2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\ [(r - 2u)\, r\, \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r} + (2r - u)\sqrt{r^2 - u^2}]$$

also

$$z' = \tfrac{1}{6}.\ [(r^2 - 4ru + 2u^2)\ 3r\ \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r} + (8r^2 - 9ru + 4u^2)\sqrt{r^2 - u^2}] : [(r - 2u)\, r\, \text{Arc Cos}\,\frac{u}{r} + (2r - u)\sqrt{r^2 - u^2}]$$

Für $\beta = \tfrac{1}{2}\pi$, also $u = 0$, entsteht

$$z' = \tfrac{1}{6}.\ \frac{3\pi + 16}{\pi + 4}.\ r \text{ oder } \pi = \frac{22}{7} \text{ genommen}$$

$$z' = \frac{89}{150}\ r \text{ beinahe } \tfrac{3}{5}\ r.$$

Für $\beta = \pi$, also $u = -r$, entsteht

$$z' = \tfrac{7}{6}\ r.$$

Es ist ferner

$$z' = \frac{\int \frac{1}{2} y . y\, d x}{\int y\, d x};$$

und der Zähler

$$= \tfrac{1}{2} r^3 (\int \text{Sin.}\, \beta^3\, d\beta + 2 \int \beta\, \text{Sin.}\, \beta^2\, d\beta + \int \beta^2\, \text{Sin.}\, \beta\, d\beta;)$$

und weil

$$2 \int \beta\, \text{Sin.}\, \beta^2\, d\beta = \int (1 - \text{Cos.}\, 2\beta)\, \beta\, d\beta$$
$$= \tfrac{1}{2} \beta^2 - \tfrac{1}{4} \int 2\beta\, \text{Cos.}\, 2\beta .\, d\, 2\beta$$
$$= \tfrac{1}{2} \beta^2 - \tfrac{1}{4} (2\beta\, \text{Sin.}\, 2\beta + \text{Cos.}\, 2\beta)$$
$$= \tfrac{1}{2} \beta^2 - \beta\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Cos.}\, \beta - \tfrac{1}{4} (2\, \text{Cos.}\, \beta^2 - 1)$$

ferner

$$\int \beta^2\, \text{Sin.}\, \beta\, d\beta = - \beta^2\, \text{Cos.}\, \beta + 2\beta\, \text{Sin.}\, \beta + 2\, \text{Cos.}\, \beta$$

ist, so hat man den Zähler

$$= \tfrac{1}{2} r^3 (- \tfrac{1}{3}\, \text{Sin.}\, \beta^2\, \text{Cos.}\, \beta - \tfrac{2}{3}\, \text{Cos.}\, \beta$$
$$+ \tfrac{1}{2} \beta^2 - \beta\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Cos.}\, \beta - \tfrac{1}{2}\, \text{Cos.}\, \beta^2$$
$$+ \tfrac{1}{4} - \beta^2\, \text{Cos.}\, \beta + 2\beta\, \text{Sin.}\, \beta + 2\, \text{Cos}\, \beta) + C$$
$$= \tfrac{1}{24} r^3 [3 + 16\, \text{Cos.}\, \beta - 6\, \text{Cos.}\, \beta^2 - 4\, \text{Cos.}\, \beta\, \text{Sin.}\, \beta^2$$
$$+ 6 (1 - 2\, \text{Cos.}\, \beta) \beta^2 + 12 (2 - \text{Cos.}\, \beta) \beta\, \text{Sin.}\, \beta] + C.$$

Für $\beta = 0$ wird auch dieser Zähler $= 0$; also $C = - \frac{1}{24} r^3 . 13$; folglich der Zähler vollständig $= \frac{1}{12} r^3 [-5 + 8\, \text{Cos.}\, \beta - 3\, \text{Cos.}\, \beta^2 - 2\, \text{Cos.}\, \beta\, \text{Sin.}\, \beta^2 + 6 (2 - \text{Cos.}\, \beta) \beta\, \text{Sin.}\, \beta + 3 (1 - 2\, \text{Cos.}\, \beta)\, \beta^2]$

oder

$$= \tfrac{1}{12} [2 u^3 - 3 r u^2 + 6 r^2 u - 5 r^3$$
$$+ 6 r (2 r - u) \sqrt{r^2 - u^2}\, \text{Arc. Cos.}\, \frac{u}{r}$$
$$+ 3 r^2 (r - 2 u) (\text{Arc. Cos.}\, \frac{u}{r})^2];$$

daher

$$z = \tfrac{1}{6}.\ [2u^3 - 3ru^2 + 6r^2u - 5r^3$$
$$+ 6r(2r - u)\sqrt{r^2 - u^2}\ \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r}$$
$$+ 3r^2(r - 2u)(\text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r})^2] : [(2r - u)\sqrt{r^2 - u^2}$$
$$+ r(r - 2u)\ \text{Arc. Cos.}\ \frac{u}{r}].$$

Für $\beta = \frac{1}{2}\pi$; also $u = 0$ entsteht

$$z = \tfrac{1}{12}.\ \frac{3\pi^2 + 24\pi - 20}{\pi + 4}\ r$$

oder $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt,

$$z = \frac{521}{525}\ r;\ \text{beinahe} = r.$$

Für $\beta = \pi$; also $u = -r$ entsteht

$$z = \tfrac{1}{6}.\ \frac{9\pi^2 - 16}{3\pi}\ r = \tfrac{1}{6}\left(3\pi - \frac{16}{3\pi}\right) r$$

oder $\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt,

$$z = \frac{893}{693}\ r;\ \text{beinahe} = \frac{9}{7}\ r.$$

Anmerk. Nach §. 14. ist daher das Konoid, welches ngh bei der Umdrehung um ng beschreibt,

$$= \tfrac{1}{2} r^2\pi .\ 2.\ \left(\tfrac{1}{6}.\ \frac{9\pi^2 - 16}{3\pi}\ r.\right).\ \pi$$
$$= \tfrac{1}{6} r^3 \pi\ (9\pi^2 - 16)$$

und dasjenige, welches ngh bei der Umdrehung um gh beschreibt,

$$= \tfrac{1}{2} r^2\pi .\ 2.\ (2r - \tfrac{7}{6} r).\ \pi = \tfrac{5}{2} r^3 \pi^2;$$

folglich das ganze Konoid, welches hnk bei der Umdrehung um hk bildet $= 5r^3\pi^2$. Dasjenige, welches bei dieser Umdrehung der Kreis erzeugt, ist $= 2r^3\pi^2$; folglich verhält sich ersteres zu letzteren $= 5 : 2$. Die erzeugenden Ebenen verhalten sich $= 3 : 1$.

Eben so ergiebt sich nach §. 13. des ersteren Konoids gewölbte Oberfläche

$$= 4 . r . 2 . (\pi - \tfrac{4}{3}) r \pi = \tfrac{8}{3} r^2 \pi (3 \pi - 4)$$

siehe §. 17. und die, welche n h bei der Umdrehung um h g erzeugt

$$= 4 r . 2 (2 r - \tfrac{2}{3} r) \pi = \tfrac{8}{3} . 4 r^2 \pi .$$

Des ersten Abschnitts dritte Abtheilung.

Bestimmung der Schwerpuncte einiger gewölbten Flächen.

§. 29. **Aufgabe.** Den Schwerpunct des Mantels eines senkrechten Cylinders zu bestimmen.

Auflösung. Er liegt in der Mitte der Achse.

§. 30. **Aufgabe.** Den Schwerpunct einer Calotte, so wie den einer Zone der Kugel zu bestimmen.

1ste **Auflösung.** Bezeichnet r den Halbmesser der zugehörigen Kugel, so ist *Fig.* 3

$$y^2 = 2 r . x - x^2 ; \text{ also}$$

$$(d y)^2 = \frac{(r - x)^2}{y^2} . d x^2 ; \text{ folglich}$$

nach §. 11.

$$z = \frac{\int x y \sqrt{1 + \frac{(r - x)^2}{y^2}} . d x}{\int y \sqrt{1 + \frac{(r - x)^2}{y^2}} . d x}$$

$$= \frac{r \int x d x}{r \int d x} = \frac{\frac{1}{2} x^2}{x} = \frac{1}{2} x .$$

2te Auflösung. Denkt man sich an = x in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilt, und setzt jeden solchen Theil = e, so ist jedes einem solchen Theil als Höhe zugehörige Stück der Calotte, sei es Zone oder Calotte, $= 2\,r\,\pi\,.\,e$. Es haben also alle diese gewölbten Streifen einerlei Fläche, folglich auch einerlei Gewicht, und der Schwerpunct eines jeden Theils liegt in an. Es ist daher der Schwerpunct der geraden Linie an zugleich Schwerpunct der Calotte, und es liegt also derselbe in der Mitte von an. Dies gilt, es mag von einer Zone oder Calotte die Rede sein.

§. 31. Aufgabe. Den Schwerpunct der gesamten Oberfläche eines Kugel-Abschnitts zu bestimmen. *Fig.* 3.

Auflösung. Es ist, wenn man die Momente in Beziehung auf irgend einen Durchmesser der begränzenden Kreisebene macht, und den Halbmesser der Kugel mit r bezeichnet, die Summe der Momente

$$= 2\,r\,\pi\,x\,.\,\tfrac{1}{2}\,x = r\,\pi\,x^2$$

und die Summe der Gewichte

$$= 2\,r\,\pi\,x + y^2\,\pi;$$

daher die Entfernung z des Schwerpuncts der Oberfläche von dieser Kreisebene

$$= \frac{r\,x^2}{2\,r\,x + y^2};\ \text{oder}$$

$$z = \frac{r\,x}{4\,r - x}.$$

Für die gesammte Oberfläche der Halbkugel entspringt hieraus $z = \tfrac{1}{3}\,r.$

§. 32. Aufgabe. Den Schwerpunct der gesammten Oberfläche einer körperlichen Zone zu bestimmen.

Auflösung. Es ist, wenn a den Halbmesser der unteren, b den der oberen begränzenden mit jener parallelen Kreisebene, und h die Höhe der Zone bezeichnet (*Fig.* 18.) in Beziehung auf a die Summe der Momente $= 2 r \pi h . \frac{1}{2} h + b^2 \pi . h$; und die Summe der Gewichte

$$= 2 r \pi h + a^2 \pi + b^2 \pi; \text{ folglich}$$

$$z = \frac{r h^2 + b^2 h}{2 r h + a^2 + b^2},$$

in welcher Formel

$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2} \text{ ist.}$$

Für r = a entspringt hieraus

$$z = \frac{a h + b^2}{2 a h + a^2 + b^2} h.$$

§. 33. Aufgabe. Den Schwerpunct des Mantels eines senkrechten Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet h die Achse, also auch die Höhe; b die Seite, und denkt man sich den Mantel als aus lauter Dreieckchen bestehend, welche die Spitze des Kegels zur gemeinschaftlichen Spitze und die Peripherie seiner Grundfläche zur Summe ihrer Grundlinien haben, so liegt der Schwerpunct eines jeden solchen Dreiecks in $\frac{2}{3}$ b von der Spitze herab. Denkt man sich also eine Peripherie auf dem Mantel in der Entfernung $\frac{2}{3}$ b von der Spitze herab, so ist der Schwerpunct dieser Peripherie zugleich der Schwer-

punct des Mantels. Er liegt also in der Entfernung $\frac{2}{3}$ h von der Spitze, in der Achse.

§. 34. Aufgabe. Den Schwerpunct der gesammten Oberfläche eines senkrechten Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet b die Seite, h die Höhe, r den Halbmesser der Grundfläche, so findet man leicht die Entfernung des verlangten Schwerpuncts von der Spitze herab in die Achse

$$= \frac{1}{3} h . \frac{b}{b+r}.$$

§. 35. Aufgabe. Den Schwerpunct der gesammten Oberfläche eines Kugel-Ausschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel, h die Höhe der Calotte; b die halbe Sehne, so ergiebt sich die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpunct der Kugel

$$= \frac{1}{3} . \frac{3h(2r-h) + 2b(r-h)}{2h+b} = \frac{b}{3h} \frac{b^2+3bh-h^2}{b+2h}$$

und die vom Scheitelpunct des Kugel-Ausschnitts

$$= \frac{1}{3} \frac{br + 3h^2 + 2bh}{2h+b} = \frac{b^3 + 5bh^2 + 6h^3}{6h(b+2h)}.$$

§. 36. Aufgabe. Den Schwerpunct des Mantels eines senkrechten abgekürzten Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet h die Höhe, b die Seite, r den Halbmesser der einen, ϱ den der andern Grundfläche, so ergiebt sich ganz nach §. 33. oder auch nach §. 20. die Entfernung des Schwerpuncts, auf

der Achse vom Mittelpunct der Grundfläche $r^2 \pi$ gemessen,

$$= \frac{1}{3} h. \frac{r + 2\varrho}{r + \varrho}.$$

§. 37. Aufgabe. Den Schwerpunct der gesammten Oberfläche eines senkrechten abgekürzten Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Bei derselben Bezeichnung wie in §. 36. ergiebt sich die Entfernung des Schwerpuncts vom Mittelpunct der Grundfläche $r^2 \pi$ auf der Achse gemessen,

$$= \frac{1}{3} h \frac{b(r+2\varrho) + 3\varrho^2}{b(r+\varrho) + r^2 + \varrho^2}.$$

Für $r = \varrho$, also für den senkrechten Cylinder, entspringt hieraus $\frac{1}{2}$ h.

§. 38. Aufgabe. Den Schwerpunct des parabolischen Konoids zu bestimmen.

Auflösung. Es sei x die Abscisse auf der Achse; y die rechtwinklichten Ordinate, also

$$y^2 = px;$$

so ist die Entfernung vom Scheitelpunct bis zum Schwerpunct auf der Achse, oder

$$z = \frac{\int x y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Es ergiebt sich vollständig

$$z = \frac{1}{10x} \cdot \frac{(6x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + y^5}{(4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - y^5}.$$

Für $x = 2$, $y = 3$, erhält man

$$z = 1,08.$$

§. 39.

§. 39. **Aufgabe.** Eine Näherungs-Formel zur Bestimmung des Schwerpuncts der Oberfläche eines Konoids, welches durch Umdrehung irgend einer Figur (*Fig.* 19) um eine feste Achse nm erzeugt wird, darzustellen.

Auflösung. Man theile die Achse nm in eine große Anzahl = n gleicher kleiner Theile = α und bezeichne die n + 1 rechtwinklichten Ordinaten nach der Reihefolge mit A, B, C u. s. w.; X, Y, Z. Betrachtet man nun jede schmale Zone als einen Cylinder-Mantel, dem arithmetischen Mittel beider die Gränzen beschreibender Ordinaten als Halbmesser zugehörig, so ist die gesammte Oberfläche

$$= 2 . \frac{A+B}{2} . \pi\alpha + 2 . \frac{B+C}{2} \pi . \alpha + \ldots + 2 . \frac{Y+Z}{2} \pi\alpha$$

$$= \pi\alpha (A + 2B + 2C + \ldots + 2Y + Z)$$

und ihr Moment in Beziehung auf A

$$= 2 . \frac{A+B}{2} \pi\alpha . \tfrac{1}{2}\alpha + 2 . \frac{B+C}{2} \pi\alpha . \tfrac{3}{2}\alpha + \ldots$$

$$+ 2 . \frac{X+Y}{2} \pi\alpha . \frac{2n-3}{2} \alpha + 2 . \frac{Y+Z}{2} \pi\alpha . \frac{2n-1}{2} \alpha$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\alpha^2 [A + 4B + 8C + \ldots + (4n-4) Y + (2n-1) Z]$$

Setzt man also die Entfernung des Schwerpuncts von A in der Achse gleich z; so ist

$$z = \tfrac{1}{2}\alpha . \frac{A + (2n-1) Z + 4 [B + 2C + 3D + \ldots + (n-1) Y]}{A + Z + 2 (B + C + D + \ldots + Y)}$$

Sind A und Z gleich o, so entsteht

$$z = \alpha . \frac{B + 2C + 3D + \ldots + (n-1) Y}{B + C + D + \ldots + Y} .$$

Des ersten Abschnitts vierte Abtheilung.

Bestimmung der Schwerpuncte einiger Körper.

§. 40. **Aufgabe.** Den Schwerpunct des Prismen zu bestimmen.

Auflösung. Er liegt, wie sich leicht ergiebt, in der Mitte der geraden Verbindungslinie der Schwerpuncte beider Grundflächen.

§. 41. **Aufgabe.** Den Schwerpunct der dreiseitigen Pyramide anzugeben.

1ste **Auflösung.** Halbirt man eine der Kanten, (*Fig.* 20) etwa BC in E, zieht ED; macht EG $= \frac{1}{3}$ ED und zieht dann GA so ist GA eine Schwerlinie der Pyramide, denn in ihr liegen die Schwerpuncte aller mit DBC parallelen Durchschnittsebenen derselben. Aus denselben Grund ist auch DF eine Schwerlinie, wenn EF $= \frac{1}{3}$ EA genommen wird. Folglich ist H als Durchschnittspunct von GA und FD der verlangte Schwerpunct. Weil nun

$$EF = \tfrac{1}{3} EA \text{ und } EG = \tfrac{1}{3} ED \text{ ist,}$$

so ist GF parallel DA, und also △ GHF ähnlich △ DHA; daher

$$HA : HG = DA : GF = DE : GE = 3 : 1$$

und folglich $GH = \frac{1}{4} AG.$

Eben so $FH = \frac{1}{4} FD.$

2te **Auflösung.** Halbirt man eine der Kanten, etwa BC (*Fig.* 21) in E; zieht EA und ED,

nimmt in EA den Punct F beliebig, zieht durch F, HJ parallel BC und FG ‡ AD; dann durch G, KL ‡ BC und verbindet H mit K und J mit L, so wird HJKL ein Parallelogramm, und man kann sich die ganze Pyramide aus lauter Parallelogrammen, mit HJKL parallel, bestehend denken, deren erstes in BC und deren letztes in AD verschwindet. Halbirt man nun auch AD in N und zieht EN; so schneidet EN jedes dieser Parallelogrammen in seinem Schwerpunct, ist also eine Schwerlinie der Pyramide. Setzt man nun die Entfernung von E bis zu diesem Schwerpunct = z; EN = c; BC = a; AD = b; EP = x; den Winkel, den HJ und FG bilden = α; den Neigungswinkel von EN mit jedem der Parallelogram- = β; so hat man, weil

$$HJ = \frac{a(c-x)}{c};$$

$$FG = \frac{bx}{c};$$

also das Parallelogramm

$$HJKL = \frac{ab}{c^2}(cx - x^2)\,\text{Sin.}\,\alpha \text{ ist,}$$

den Körper zwischen HJKL und BC

$$= \int \frac{ab}{c^2}(cx - x^2)\,\text{Sin.}\,\alpha.\,d(x\,\text{Sin.}\,\beta)$$

$$= \frac{ab\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta}{c^2}\left(\tfrac{1}{2}cx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)$$

und sein Moment in Beziehung auf eine Achse durch E parallel mit DA

$$= \int \frac{ab}{c^2}(cx - x^2)\,\text{Sin.}\,\alpha.\,x.\,d(x\,\text{Sin.}\,\beta)$$

$$= \frac{ab \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{c^2} \left(\tfrac{1}{3} c x^3 - \tfrac{1}{4} x^4\right);$$

folglich

$$z = \frac{\tfrac{1}{3} c x^3 - \tfrac{1}{4} x^4}{\tfrac{1}{2} c x^2 - \tfrac{1}{3} x^3}; \text{ oder}$$

$$z = \frac{x}{2} \cdot \frac{4c - 3x}{3c - 2x}.$$

Für $x = c$ entspringt hieraus

$$z = \tfrac{1}{2} c;$$

und es liegt also der Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide in der Mitte der Verbindungslinie der Mittelpuncte zweier gegenüber liegender Kanten.

Anmerk. Das Resultat dieser Auflösung wurde mir von Herrn Crelle mitgetheilt. Es ist um so netter, weil der Schwerpunct gerade im größten der Parallelogramme liegt, welche sich auf die angegebene Weise durch die Pyramide legen lassen. Uebrigens läßt sich das Resultat $z = \frac{1}{2} c$ auch sehr leicht aus der ersten Auflösung folgern. Zieht man nemlich in *Fig.* 20 durch den gefundenen Schwerpunct H und durch E eine gerade Linie, bis sie AD in N schneidet, so ist

$$\frac{DHA}{AHE} = \frac{DG}{GE} = 2;$$

$$\frac{AHE}{DHE} = \frac{AN}{ND};$$

$$\frac{DHE}{DHA} = \frac{EF}{FA} = \tfrac{1}{2};$$

und das Product giebt

$$\frac{AN}{ND} = 1; \text{ also } AN = ND.$$

Ferner ist $EM : EN = 1 : 3$; also

$$EM = \tfrac{1}{3} EN; \; MN = \tfrac{2}{3} EN;$$

endlich hat man auch

$$HM : HN = HG : HA = 1 : 3; \text{ daher}$$
$$NM : HM = 4 : 1; \text{ folglich}$$
$$MH = \tfrac{1}{4} NM = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3} EN = \tfrac{1}{6} EN; \text{ also}$$
$$EH = EM + MH = \tfrac{1}{3} EN + \tfrac{1}{6} EN; \text{ oder}$$
$$EH = \tfrac{1}{2} EN.$$

3te Auflösung. Bezeichnen a, b, c, d, *Fig.* 22, die normalen Abstände der Ecken A, B, C, D der Pyramide von einer beliebigen Ebene VW und man halbirt zwei gegenüber liegende Kanten, etwa BC in E und AD in F, zieht dann EF und halbirt EF in G, so daß also G der Schwerpunct der Pyramide ist, so wird, wenn man die Normalen EE′; FF′ und GG′ = z auf VW fällt,

$$EE' = \frac{b + c}{2};\ FF' = \frac{a + d}{2}$$

und
$$z = \frac{EE' + FF'}{2};$$

also, wenn man die Werthe für EE′ und FF′ setzt,

$$z = \frac{a + b + c + d}{4}.$$

§. 42. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder Pyramide zu bestimmen.

1ste Auflösung. Die Grundfläche sei ein n Eck; man ziehe von einer Ecke alle n — 3 Diagonalen und lege durch jede und die Spitze eine Ebene, so wird dadurch die Pyramide in n — 2 dreiseitige Pyramiden zerlegt. Sucht man nun von jeden der n — 2 Dreiecke der Grundfläche den Schwerpunct, zieht aus jedem nach der Spitze der Pyramide eine gerade Linie

und theilt jede in 4 gleiche Theile, so ist die Ebene E, welche man sich durch die ersten n — 2 Theilpuncte gelegt denken kann, mit der Grundfläche parallel und eine Schwerebene der ganzen Pyramide. Sucht man nun auch den Schwerpunct der ganzen Grundfläche und verbindet ihn mit der Spitze der Pyramide durch eine gerade Linie l, so ist der Punct, wo l die Ebene E schneidet, der verlangte Schwerpunct, und seine Entfernung, von der Grundfläche auf l gemessen, ist $= \frac{1}{4}$ l.

2te Auflösung. Die Grundfläche der Pyramide sei = F; die gerade Linie, welche ihren Schwerpunct mit der Spitze verbindet, = l; der Neigungswinkel von l gegen F gleich β; in der Entfernung x, auf l von der Spitze herab gemessen, sei eine Ebene, parallel mit F, durch die Pyramide gelegt = y; und der Schwerpunct der Pyramide $\frac{1}{3}$ y. x Sin. β befinde sich in der Entfernung z, auf l, von der Spitze herab gemessen, so ist

$$z = \frac{\int x . y \, d\,(x \text{ Sin. } \beta)}{\frac{1}{3}\, y\, x \text{ Sin. } \beta}.$$

Eben so verhält sich aber

$$F : y = l^2 : x^2; \text{ und also ist}$$

$$y = \frac{F}{l^2}\, x^2; \text{ folglich}$$

$$z = \frac{\int x^3\, dx}{\frac{1}{3}\, x^3} = \frac{\frac{1}{4}\, x^4}{\frac{1}{3}\, x^3} = \frac{3}{4}\, x.$$

Für x = l ist daher

$$z = \frac{3}{4}\, l.$$

§. 43. Aufgabe. Den Schwerpunct jedes schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismens ABCDEF (*Fig.* 23) zu bestimmen.

Auflösung. Die Grundfläche EDF sei = G; die Normalen von A, B, C auf G heißen a, b, c; die Entfernung des Schwerpuncts des schief abgeschnittenen Prismens von G sei = z, so ist, wenn man durch die Ebenen EAF und BAF den Körper in die 3 Pyramiden EDFA, EBFA und BFCA zerlegt, nach §. 41. 3te Aufl.

$$z = \frac{EDFA.\frac{a}{4} + EBFA.\frac{a+b}{4} + BFCA.\frac{a+b+c}{4}}{ABCDEF}$$

Es ist aber $EDFA = G.\frac{a}{3}$;

$$EBFA = EBFD = G.\frac{b}{3};$$

$$BFCA = EFCA = EFCD = G.\frac{c}{3} \text{ und}$$

$$ABCDEF = G.\frac{a+b+c}{3};$$

folglich wenn diese Werthe substituirt werden,

$$z = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{4(a+b+c)}.$$

§. 44. Aufgabe. Den Schwerpunct jedes mehrseitigen schief abgeschnittenen Prismens zu bestimmen.

Auflösung. Man zerlege dasselbe durch Diagonalebenen in lauter schief abgeschnittene dreiseitige Prismen, suche nach §. 43. den Schwerpunct jedes einzelnen, und dividire sodann die Summe der Momente dieser Prismen durch die Summe ihrer Inhalte,

so erhält man die Entfernung des Schwerpuncts von der Grundfläche.

§. 45. Aufgabe. Den Schwerpunct jeder abgekürzten Pyramide zu bestimmen.

Auflösung. Die untere Grundfläche sei $= a$; die obere $= b$; die Verbindungslinie EG *(Fig. 24)* der Schwerpuncte E, G beider Grundflächen sei $= c$; ihr Neigungswinkel gegen die Grundflächen $= \beta$; $GN = x$; H sei der Schwerpunct der ganzen; K der der Ergänzungspyramide; also

$$EH = \tfrac{1}{4}(c + x);\ GK = \tfrac{1}{4}x;\ EK = c + \tfrac{1}{4}x.$$

Bezeichnet nun M den zu bestimmenden Schwerpunct der abgekürzten Pyramide, und setzt man $EH = z$, so ist

$$z = \frac{a.\tfrac{1}{3}(c+x).\tfrac{1}{4}(c+x) - b\tfrac{1}{3}x.(c+\tfrac{1}{4}x)}{a\tfrac{1}{3}(c+x) - b\tfrac{1}{3}x}$$

$$= \tfrac{1}{4}.\frac{ac^2 + [(a-2b)2c + (a-b)x]x}{ac + (a-b)x}$$

Es verhält sich aber

$a : b = (c + x)^2 : x^2$, und hieraus folgt

$$x = \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ oder auch}$$

$$x = c.\frac{b + \sqrt{ab}}{a - b}; \text{ und also ist}$$

$$(a - b)x = c(b + \sqrt{ab}); \text{ folglich}$$

$$z = \tfrac{1}{4}.\frac{ac + (2a - 4b + b + \sqrt{ab})x}{a + b + \sqrt{ab}}$$

$$= \tfrac{1}{4}.\frac{ac + (2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).\dfrac{c\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}{a + b + \sqrt{ab}}$$

$$= \frac{c}{4}.\frac{a + 3b + 2\sqrt{ab}}{a + b + \sqrt{ab}}.$$

Für den abgekürzten Kegel, wenn r den Halbmesser der unteren, ϱ den der oberen Grundfläche bezeichnet, entspringt hieraus

$$z = \frac{c}{4} \cdot \frac{r^2 + 3\varrho^2 + 2r\varrho}{r^2 + \varrho^2 + r\varrho}.$$

§. 46. Aufgabe. Den Schwerpunct des Kugel-Ausschnitts zu bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser der zugehörigen Kugel sei = r; die Höhe der begränzenden Calotte = h. Man denke sich mit $\frac{3}{4}$ r eine Calotte beschrieben, so liegen in ihr die Schwerpuncte aller der Pyramidchen, aus welchen der Kugelausschnitt als bestehend angesehen werden kann. Der Schwerpunct dieser Calotte ist also zugleich der verlangte Schwerpunct des ganzen Kugelausschnitts. Es liegt also derselbe nach §. 30. in der Mitte der Höhe dieser Calotte, welche Höhe = $\frac{3}{4}$ h ist. Seine Entfernung z vom Mittelpunct der Kugel ist also = $\frac{3}{4}$ r — $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$ h; oder z = $\frac{3}{8}$ (2r — h).

Für h = r; also für die Halbkugel, entspringt hieraus $z = \frac{3}{8}.\, r.$

§. 47. Aufgabe. Den Schwerpunct des Kugel-Abschnitts zu bestimmen.

1ste Auflösung. Ist in *Fig.* 25 N der Schwerpunct des Kugelabschnitts; K der des Kugelausschnitts; D der des Ergänzungskegels; also

$MK = \frac{3}{8}(2r - h);$

$MD = \frac{3}{4}(r - h)$, so hat man, weil der Kegelabschnitt $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$,

der Kugelausschnitt $= \frac{2}{3} r^2 \pi h$,

der Kegel $= \frac{1}{3} b^2 \pi (r - h)$ ist,

$$MN = \frac{\frac{2}{3} r^2 \pi h . \frac{3}{8}(2r - h) - \frac{1}{3} \pi b^2 (r - h) \frac{3}{4}(r - h)}{\frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)}$$

oder $2rh - h^2$ für b^2 gesetzt,

$$MN = \frac{3}{4} . \frac{(2r - h)^2}{3r - h}; \text{ folglich}$$

$$PN = \frac{h}{4} . \frac{4r - h}{3r - h} \text{ und}$$

$$QN = \frac{h}{4} . \frac{8r - 3h}{3r - h};$$

oder durch b und h ausgedrückt,

$$MN = \frac{3}{2} . \frac{b^4}{h(3b^2 + h^2)};$$

$$PN = \frac{h}{2} . \frac{2b^2 + h^2}{3b^2 + h^2};$$

$$QN = \frac{h}{2} . \frac{4b^2 + h^2}{3b^2 + h^2}.$$

2te Auflösung. Für irgend eine Abscisse x von Q herab auf h und zugehörige rechtwinklichte Ordinate y ist nach §. 12,

$$z = \frac{\int x y^2 . dx}{\int y^2 dx},$$

Es ist aber $y^2 = 2rx - x^2$; also

$$z = \frac{x}{4} . \frac{8r - 3x}{3r - x} \text{ wie oben QN.}$$

§. 48. Aufgabe. Den Schwerpunct der körperlichen Zone zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet *Fig.* 26 h die Höhe der Zone, a den Halbmesser der unteren; b den der oberen begränzenden parallelen Kreisebene; y die Höhe des Ergänzungs-Kugelabschnitts, x den Halbmesser der

Kugel; z die Entfernung des Schwerpuncts der körperlichen Zone vom Mittelpunct M der Kreisebene $a^2 \pi$; N den Schwerpunct des ganzen, P den des Ergänzungs-Kugelabschnitts, so ist

$$MN = \frac{h+y}{2} \cdot \frac{2a^2 + (h+y)^2}{3a^2 + (h+y)^2}$$

und der ganze Kugelabschnitt selbst

$$= \tfrac{1}{6} \pi (h+y) [3a^2 + (h+y)^2];$$

folglich sein Moment

$$= \tfrac{1}{12} \pi (h+y)^2 [2a^2 + (h+y)^2].$$

Ferner der Ergänzungs-Kugelabschnitt

$$= \tfrac{1}{6} \pi y (3b^2 + y^2); \text{ und}$$

$$MP = h + \frac{y}{2} \cdot \frac{2b^2 + y^2}{3b^2 + y^2};$$

folglich sein Moment

$$= \tfrac{1}{6} \pi hy (3b^2 + y^2) + \tfrac{1}{12} \pi y^2 (2b^2 + y^2);$$

und weil der Inhalt der körperlichen Zone

$$= \tfrac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2) \text{ ist,}$$

so hat man also

$$z = \frac{(h+y)^2 [2a^2 + (h+y)^2] - 2hy(3b^2 + y^2) - y^2(2b^2 + y^2)}{2h(3a^2 + 3b^2 + h^2)}$$

$$= \frac{2a^2h^2 + h^4 + (2a^2 + 2h^2 - 3b^2) 2hy + (a^2 + 3h^2 - b^2) 2y^2 + 2y . hy^2}{2h(3a^2 + 3b^2 + h^2)}$$

Nun ist aber

$$y : b = b : 2x - y \text{ und}$$

$$y + h : a = a : 2x - y - h; \text{ hieraus folgt}$$

$$hy^2 = b^2h + (b^2 - h^2 - a^2) y;$$

und setzt man diesen Werth für hy^2 ins letzte Glied des Zählers im Werth für z, so entsteht

$$z = \frac{2a^2h^2 + h^4 + (a^2 + h^2 - b^2) 4hy + 4h . hy^2}{2h(3a^2 + 3b^2 + h^2)}$$

und substituirt man nun jenen Werth noch einmal, so ergiebt sich

$$z = \frac{h}{2} \cdot \frac{2a^2 + 4b^2 + h^2}{3a^2 + 3b^2 + h^2}.$$

Ist M der Mittelpunct der Kugel, also

$b^2 = a^2 - h^2$; so entsteht

$$z = \tfrac{3}{4} h. \frac{2a^2 - h^2}{3a^2 - h^2}.$$

§. 49. Aufgabe. Den Schwerpunct des parabolischen Konoids zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist $y^2 = px$, und setzt man die Entfernung des Schwerpuncts, vom Scheitel herab gemessen, $= z$; so ist

$$z = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx} = \frac{\frac{1}{3} x^3}{\frac{1}{2} x^2} = \tfrac{2}{3} x.$$

§. 50. Aufgabe. Den Schwerpunct des elliptischen Konoids zu bestimmen.

Auflösung. Liegt der Scheitel im Endpunct n der großen Achse, *Fig.* 16, so ist

$$z = \frac{\int x . \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2) dx}{\int \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2) dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} a x^3 - \frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{3} x^3}$$

$$= \frac{x}{2} . \frac{4a - 3x}{3a - 2x}, \text{ wie QN in §. 47.}$$

Liegt derselbe im Endpunct m der kleinen Achse, so erhält man eben so

$$z = \frac{x}{2} . \frac{4c - 3x}{3c - 2x}.$$

Im ersten Fall erhält man für $x = \frac{1}{2}a$;

$$z = \tfrac{5}{8} . \tfrac{1}{2} a.$$

Im zweiten für $x = \frac{1}{2}c$;

$$z = \tfrac{5}{8} . \tfrac{1}{2} c.$$

§. 51. **Aufgabe.** Den Schwerpunct jedes irregulären Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Man theile denselben durch parallele Ebenen A, B, C, ... Y, Z, in gleichen Abständen $= \alpha$ gedacht, in eine *gerade* Anzahl $= n$ Schichten, so daß also A und Z die den Körper begränzenden Ebenen sind, welche auch $= 0$ sein können. Nimmt man nun α sehr klein, so kann man mit einem geringen Fehler jeden zwischen zwei solchen Ebenen, wie etwa A, B, liegenden Körper nach demselben Gesetz berechnen, und seinen Schwerpunkt auf dieselbe Weise bestimmen, als wenn A, B parallele Linien in der Entfernung α wären, welche an ihren Enden durch parabolische Bogen verbunden sind. Dieser Ansicht gemäß bestimmt sich dann näherungsweise die Entfernung z des Schwerpunkts des Körpers von A, ganz wie in §. 26; nemlich

$$z = \alpha . \frac{0.A + 1.4B + 2.2C + 3.4D + \ldots + (n-2)2X + (n-1)4Y + nZ}{A + 4B + 2C + 4D + \ldots + 2X + 4Y + Z}.$$

Ist der Körper ein Konoid, also A, B, C.... Y, Z Kreisebenen, und bezeichnen a, b, c .... die zugehörigen Halbmesser, so entsteht

$$z = \alpha . \frac{1.4b^2 + 2.2c^2 + 3.4d^2 + 4.2e^2 + 5.4f^2 + \ldots}{a^2 + 4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + 2.e^2 + 4f^2 + \ldots}$$

wo aber, wenn ϱ den Halbmesser der vorletzen oder

nten, μ den der letzten, also der den Körper begränzenden Ebene bezeichnet, $(n-1) \cdot 4\varrho^2 + n \cdot \mu^2$ die beiden letzten Glieder des Zählers, und $4\varrho^2 + \mu^2$ die beiden letzten Glieder im Nenner sind.

Anmerk. In manchen Fällen der Anwendung dieser Formel heben sich die mancherlei Fehler derselben zufällig gänzlich. Nimmt man z. B. einen Kungelabschnitt von der Höhe h, setzt den Halbmesser der Kugel $= r$ und theilt h in 4 gleiche Theile, so hat man $a = 0$; $b^2 = 2r \cdot \frac{1}{4}h - \frac{1}{16}h^2$; $c^2 = 2r \cdot \frac{2}{4}h - \frac{4}{16}h^2$; $d^2 = 2r \cdot \frac{3}{4}h - \frac{9}{16}h^2$; $e^2 = 2r \cdot \frac{4}{4}h - \frac{16}{16}h^2$; und $\alpha = \frac{1}{4}h$; folglich

$$z = \alpha \cdot \frac{4b^2 + 2 \cdot 2c^2 + 3 \cdot 4d^2 + 4 \cdot e^2}{4b^2 + 2c^2 + 4d^2 + e^2}$$

oder wenn man die Werthe substituirt

$$z = \frac{h}{4} \cdot \frac{8r - 3h}{3r - h}$$ ganz wie in §. 47.

Eben so vollständig entsteht diese Formel, wenn man h nur in zwei gleiche Theile theilt.

Zweiter Abschnitt.

Vom materiellen Hebel.

§. 52. Erklärung. Wenn Kräfte so auf einen schweren festen Körper wirken, daß sie, im Verein mit dem Gewicht des Körpers als mit- oder als gegenwirkende Kraft, demselben ein Bestreben zu drehender Bewegung mittheilen, so heißt der Körper ein materieller Hebel. Steht der Körper an und für sich fest, d. h. ist derselbe so unterstützt, daß er durch sein eigenes Gewicht nicht umgeworfen, also zu keiner drehenden Bewegung gebracht werden kann, und es finden nun Einwirkungen auf ihn statt, welche das Bestreben äußern, ihn umzuwerfen, so heißt der Widerstand, welchen derselbe dem Umwerfen entgegen setzt, seine Stabilität oder Standfähigkeit. Das Moment seines Gewichtes in Beziehung auf die Achse, um welche die einwirkenden äußeren Kräfte ihn zu drehen streben, kann als Vergleichungszahl für die Größe der Stabilität dienen.

Zu den einfachsten, gewöhnlichen Anwendungen des Hebels gehören die Wagen.

Des zweiten Abschnitts erste Abtheilung.

Vom materiellen Hebel insbesondere.

---

§. 53. Aufgabe. Der Körper NM *(Fig. 27)*, dessen Gewicht W in seinem Schwerpunct G als vereint anzusehen ist, befindet sich in einer solchen Lage, daß seine Unterkante mit der Verticale den Winkel w bildet, und wird von den Kräften A, B, C unter den Neigungswinkeln α, β, γ gegen diese Kante angegriffen; man soll die Stelle K bestimmen, in welcher derselbe unterstützt werden muß, damit keine Drehung erfolgt.

Auflösung. Ist NP = a; NQ = b; NR = c; NJ = z gegeben, und man setzt NK = x; so hat man nach §. 69. I. B.

$$A(x-a)\,\text{Sin.}\,\alpha = W.(z-x)\,\text{Sin.}\,w + B(b-x)\,\text{Sin.}\,\beta + C(c-x)\,\text{Sin.}\,\gamma$$ und hieraus

$$x = \frac{Aa\,\text{Sin.}\,\alpha + Bb\,\text{Sin.}\,\beta + Cc\,\text{Sin.}\,\gamma + Wz\,\text{Sin.}\,w}{A\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,\text{Sin.}\,\beta + C\,\text{Sin.}\,\gamma + W\,\text{Sin.}\,w}.$$

Soll auch die Richtung, nach welcher die Unterlage in K müßte gegenwirken können, um eine fortgehende Bewegung nach NV zu verhindern, bestimmt werden, so hat man, den Winkel, den sie mit NV bildet, = φ gesetzt, nach §. 91. I. B.

$$\text{tg.}\,\varphi = \frac{A\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,\text{Sin.}\,\beta + C\,\text{Sin.}\,\gamma + W\,\text{Sin.}\,w}{A\,\text{Cos.}\,\alpha + B\,\text{Cos.}\,\beta + C\,\text{Cos.}\,\gamma + W\,\text{Cos.}\,w}$$

und die Größe dieser erforderlichen Gegenwirkung selbst, ebenfalls nach §. 91. I. B.

$$= \sqrt{(A\text{Sin}\,\alpha + B\text{Sin}\,\beta + C\,\text{Sin}\,\gamma + W\text{Sin}\,w)^2 + (A\text{Cos}\,\alpha + B\text{Cos}\,\beta + C\text{Cos}\,\gamma + W\text{Cos}\,w)^2}$$

Liegt

Liegt der Körper blos auf der Unterlage auf, ohne weitere Verbindung mit derselben, so wird eine fortgehende Bewegung nach NV, der Größe

$A \text{ Cos. } \alpha + B \text{ Cos. } \beta + C \text{ Cos. } \gamma + W \text{ Cos. } w$

entsprechend, erfolgen. (§. 88. I. Bd.)

Ist der Körper prismatisch, und die Achse $DE = l$; so ist $DG = \frac{1}{2} l$; ist er pyramidalisch, und werden ein paar ähnlich liegende Linien der Grundflächen, etwa EV und DN, durch H, h ausgedrückt, so hat man nach §. 45, wenn die beiden Grundflächen F, f heißen,

$$DG = \frac{l}{4} \cdot \frac{f + 3F + 2\sqrt{Ff}}{F + f + \sqrt{Ff}}$$

oder, weil $F : f = H^2 : h^2$ ist,

$$DG = \frac{l}{4} \cdot \frac{3H^2 + h^2 + 2Hh}{H^2 + h^2 + Hh},$$

woraus sich leicht z bestimmen läßt. Es ergiebt sich nemlich, wenn man $DG = e$ und den Winkel, welchen DE und NV bilden, $= \varrho$ setzt, vorausgesetzt, daß $\angle NDE = 90°$ ist;

1) $z \text{ Sin. } \varrho + h = JG \text{ Sin. } (w + \varrho)$

2) $z . \text{ Cos. } \varrho - JG \text{ Cos. } (w + \varrho) = e$

und hieraus

$z = (e + h \text{ Cotg. } w) \text{ Cos. } \varrho + (e \text{ Cotg. } w + h) \text{ Sin. } \varrho,$

worinnen

$$\text{tg. } \varrho = \frac{H - h}{l} \text{ ist.}$$

Beispiel. Der Hebel sei prismatisch und in horizontaler Lage; sein Gewicht = 40 (*Fig.* 28), die

Kräfte = 20, 30, 50, wirken lothrecht, also normal auf ihn; es sei ferner NP = a = 3; NQ = b = 5; NR = c = 12; NV = 14; so ist

$$NK = x = \frac{20.3 + 30.5 + 50.12 + 40.7}{20 + 30 + 50 + 40}$$

$$= 7\,\frac{11}{14}.$$

§. 54. Aufgabe. Der Körper NM (*Fig.* 27) ruht in seinen Endpuncten N, V auf Unterlagen; und wird von den in §. 53. angegebenen Kräften angegriffen; es soll die lothrechte Einwirkung auf jede der beiden Unterlagen bestimmt werden.

Auflösung. Die in V sei = x, die in N = y; ferner sei NV = n und übrigens die Bezeichnung wie in §. 53. Macht man die Momente in Beziehung auf N, so entsteht

$$x\,n\,\text{Sin.}\,w = A\,a\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,b\,\text{Sin.}\,\beta + C\,c\,\text{Sin.}\,\gamma$$
$$+ W\,z\,\text{Sin.}\,w,$$

und es ist also

$$x = \frac{A\,a\,\text{Sin.}\,\alpha + B\,b\,\text{Sin.}\,\beta + C\,c\,\text{Sin.}\,\gamma + W\,z\,\text{Sin.}\,w}{n\,\text{Sin.}\,w}.$$

Eben so ergiebt sich

$$y = \frac{A(n-a)\text{Sin}\,\alpha + B(n-b)\text{Sin}\,\beta + C(n-c)\text{Sin}\,\gamma + W.(n-z)\text{Sin}\,w}{n\,\text{Sin.}\,w}$$

und folglich

$$x + y = A\,\frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,w} + B\,\frac{\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,w} + C\,\frac{\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,w} + W =$$

der Summe der lothrechten Wirkungen.

Das Bestreben zur Bewegung längs NV erhält man

$$= \frac{A\,\text{Sin.}\,(w-\alpha) + B\,\text{Sin.}\,(w-\beta) + C\,\text{Sin.}\,(w-\gamma)}{\text{Sin.}\,w}.$$

Beispiel. Bei dem Beispiel zu §. 53. erhält man den Druck auf eine Unterlage in V

$$= \frac{20.3 + 30.5 + 50.12 + 20.7}{14}$$

$$= 67 \frac{6}{7}$$

und dann auf eine in N

$$= 140 - 67 \frac{6}{7} = 72 \frac{1}{7}.$$

§. 55. **Aufgabe.** Ein prismatischer Körper, von welchen jedes Stück von der Länge 1, das Gewicht q hat, befindet sich in horizontaler Lage, ist in einem seiner Endpuncte unterstützt, und wird in dem andern durch eine lothrecht wirkende Kraft P getragen; in der Entfernung a vom Unterstützungspunct wirkt lothrecht herab eine Kraft = W; man fragt, wie lang (x) der Hebel sein muß, damit P ein Minimum ist. (*Fig.* 29.)

Auflösung I. Da der Hebel prismatisch ist, so ist sein Schwerpunct in der Mitte seiner Länge, und sein Gewicht qx hat also in Beziehung auf die Unterlage den Hebelsarm $\frac{1}{2}$ x. Es entsteht also die Gleichung $Px = Wa + \frac{1}{2}x . qx$, und hieraus

$$x = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 2qaW}}{q}.$$

Aus der Formel ergiebt sich der kleinste Werth, den P haben kann, wenn x eine mögliche Größe werden soll, aus der Gleichung

$$P^2 = 2aqW;$$

also ist das kleinstmöglichste

$$P = \sqrt{2aqW},$$

und die zugehörige Länge x des Hebels

$$= \frac{P}{q} = \frac{\sqrt{2aqW}}{q} = \sqrt{\frac{2aW}{q}}$$

Auflösung II. Aus der Gleichung

$$Px = Wa + \tfrac{1}{2} q x^2 \text{ folgt}$$

$$P = \frac{Wa}{x} + \frac{q}{2} x; \text{ also}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{-Wa}{x^2} + \frac{q}{2} \text{ und}$$

$$\frac{d^2P}{d^2x} = \frac{2Wa}{x^3}.$$

Setzt man nun $\frac{dP}{dx} = 0$; so entspringt daraus

$$x = \sqrt{\frac{2aW}{q}};$$

also für dieses x

$$\frac{d^2P}{dx^2} = q.\sqrt{\frac{q}{2aW}}$$

und folglich ist, für $x = \sqrt{\frac{2aW}{q}}$, P ein Kleinstes. Der Werth dieses kleinsten P ist wie oben

$$= \sqrt{2aqW}.$$

Anmerk. Ist P gegeben, und zwar größer als die kleinstmögliche Kraft, so ergeben sich immer 2 Hebel von verschiedener Länge, d. h. zweierlei Werthe für x, welche der Forderung Genüge leisten.

Es sei z. B. $a = 2$; $W = 40$; $q = 4$; $P = 30$; so ergiebt sich $x = 11,53$ oder auch $3,47$. Soll aber, für $a = 2$; $W = 40$; $q = 4$, das kleinste P und zugehörige x bestimmt werden, so hat man

$$P = \sqrt{2.2.4.40} = 25,3 \text{ und}$$

$$x = 6,3 \ldots$$

Des zweiten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von der Stabilität.

---

§. 56. **Aufgabe.** Die Stabilitäten verschiedener Körper in Beziehung auf bestimmte Achsen anzugeben.

Auflösung. I. Für ein senkrechtes, auf einer horizontalen Ebene stehendes Parallelepipedum, dessen 3 Abmessungen a, b, c sind, und dessen Cubiceinheit das Gewicht φ hat.

Angenommen, der Körper (*Fig.* 30) stehe auf der Ebene ab und die auf ihn wirkenden Kräfte äußerten das Bestreben, denselben um a zu drehen, so denke man sich das Gewicht des Körpers $abc\varphi$ in seinem Schwerpunct n vereint, und dann durch n eine lothrechte, also auf a. b normale Linie gezogen, so ist der Hebelsarm von $abc\varphi$, in Beziehung auf a gleich $\frac{1}{2}b$; folglich die Stabilität des auf ab stehenden Körpers, in Beziehung auf a

$$= \tfrac{1}{2} ab^2 c\varphi;$$

in Beziehung auf b aber ist sie

$$= \tfrac{1}{2} a^2 bcq.$$

Steht der Körper auf ac, so ist seine Stabilität in Beziehung auf a

$$= \tfrac{1}{2} abc^2 \varphi$$

und in Beziehung auf c

$$= \tfrac{1}{2} a^2 bc\varphi,$$

wie oben, u. s. w.

II. Für ein senkrechtes, auf einer horizontalen Ebene stehendes dreiseitiges Prismen, dessen Grundflächen rechtwinklichte Dreiecke sind (*Fig.* 31).

Steht der Körper auf ab, so ist in Beziehung auf die Kante a linker Hand der Hebelsarm seines Gewichts $= \frac{2}{3}$ b, §. 18; in Beziehung auf die rechter Hand aber ist er $= \frac{1}{3}$ b. Da nun sein Gewicht $= \frac{1}{2}$ a b c φ ist, so hat man seine Stabilität in Beziehung auf die erste Achse,

$$= \frac{1}{3}\, a\, b^2\, c\, \varphi,$$

und in Beziehung auf die zweite,

$$= \frac{1}{6}\, a\, b^2\, c\, \varphi \text{ u. s. w.}$$

III. Für ein senkrechtes, auf einer horizontalen Ebene stehendes Prismen, dessen Grundflächen Trapeze sind (*Fig.* 32).

Die Höhe des Trapezes sei = h, und der Körper stehe auf einen derselben, so ist der Hebelsarm seines Gewichtes $\frac{a + b}{2}$ h. c φ in Beziehung auf die Achse a

$$= \frac{1}{3}\, h\, \frac{a + 2b}{a + b},\ \text{§. 20};$$

und in Beziehung auf die Achse b

$$= \frac{1}{3}\, h\, \frac{2a + b}{a + b};$$

folglich seine Stabilität in Beziehung auf a

$$= \frac{1}{6}\, h^2\, (a + 2b)\, c\, \varphi \text{ u. s. w.}$$

§. 57. Aufgabe. Eine auf einer horizontalen Ebene stehende, zu beiden Seiten lothrechte Mauer, von der Länge l, Breite b und Höhe h leistet einer

äußeren Einwirkung, welche sich bestrebt, dieselbe um die Kante l (*Fig.* 33) umzuwerfen, hinreichenden Widerstand; man soll bei derselben Länge und Höhe von demselben Material eine Mauer mit einer Dossirung auf der, der äußeren Einwirkung gegenüber liegenden Seite aufführen, welche nur $\frac{n}{m}$ des Volumens der ersten Mauer hat, aber derselben Einwirkung widerstehen kann, folglich dieselbe Stabilität besitzen muß, wie die erste Mauer.

Auflösung. Die Ausladung (*Fig.* 34) sei $= y$; die obere Breite der neuen Mauer $= x$; so ist die Stabilität derselben

$$= \tfrac{1}{2} h y l \varphi . \tfrac{2}{3} y + h x l \varphi . (y + \tfrac{1}{2} x)$$

und die der ersteren Mauer

$$= b h l \varphi . \tfrac{1}{2} b;$$

und die Gleichsetzung beider, der Bedingung gemäß, liefert die Gleichung

$$1)\quad 2 y^2 + 6 x y + 3 x^2 = 3 b^2 .$$

Die 2te Bedingung in Hinsicht des Volumens ist

$$\tfrac{1}{2} h l y + h l x = \frac{n}{m} b h l$$

oder

$$2)\quad y + 2 x = 2 . \frac{n}{m} b,$$

und die Entwicklung giebt

$$x = \left(- \frac{2n}{m} + \sqrt{3\left[\left(\frac{2n}{m}\right)^2 - 1\right]} \right) . b$$

$$y = \left(3 . \frac{2n}{m} - 2 \sqrt{3\left[\left(\frac{2n}{m}\right)^2 - 1\right]} \right) . b.$$

Die Forderung ist also nur dann zu erfüllen, wenn

$$\sqrt{3\left(\frac{2n}{m}\right)^2 - 3} > \frac{2n}{m};$$ oder, wenn

$$\frac{n}{m} > \sqrt{\tfrac{3}{8}};$$ d. h.

$$\frac{n}{m} > 0,61$$ ohngefähr $\frac{3}{5}$ ist.

Soll $\frac{1}{10}$ Material erspart werden, ist also $\frac{n}{m} = 0,9$; so entsteht

$$x = 0,792 . b$$
$$y = 0,216 . b.$$

Ist nun $b = \frac{1}{2} h$; so hat man

$$x = 0,396 . h$$
$$y = 0,108 . h.$$

§. 58. Aufgabe. Für eine auf einer horizontalen Ebene stehende, zu beiden Seiten lothrechte Mauer, von der Breite b und Höhe $= h$, soll eine dergleichen, von derselben Höhe und demselben Material, mit trapezförmigen Pfeilern auf der, der Einwirkung entgegengesetzten, Seite versehene Mauer, von den Abmessungen, wie sie der Grundriß *Fig.* 35 angiebt, aufgeführt werden, welche dieselbe Stabilität besitzt. Man fragt nach der Entfernung x der Pfeiler.

Auflösung. Die Stabilität des Pfeilers ist

$$= \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2}{3} b\right)^2 . \left(\tfrac{2}{3} b + 2 b\right) h \varphi$$
$$= \tfrac{16}{81} b^3 h \varphi,$$

und die, der geraden neuen Mauer, auf die Länge x, als so weit sich die Einwirkung eines Pfeilers vertheilt,

$$= \tfrac{1}{2}\, b\, x\, h\, \varphi\, (\tfrac{2}{3}\, b + \tfrac{1}{4}\, b)$$
$$= \tfrac{11}{24}\, b^2\, h\, x\, \varphi;$$

also die gesammte Stabilität auf die Länge x

$$= \tfrac{16}{81}\, b^3\, h\, \varphi + \tfrac{11}{24}\, b^2\, h\, x\, \varphi.$$

Nun ist aber die Stabilität der ersten Mauer auf dieselbe Länge x

$$= \tfrac{1}{2}\, b^2\, h\, x\, \varphi;$$

man hat also die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\, b^2\, h\, x\, \varphi = \tfrac{16}{81}\, b^3\, h\, \varphi + \tfrac{11}{24}\, b^2\, h\, x\, \varphi$$

und hieraus

$$x = \frac{384}{81}\, b, \text{ beinahe } = 4\tfrac{3}{4}\, b.$$

Die Menge Material für die erste Mauer auf die Länge $x = \frac{384}{81} b$ ist $= \frac{384}{81} b^2 h$, und für die zweite $= \frac{237}{81} b^2 h$; man bedarf also, um denselben Widerstand zu leisten, bei dieser Mauer mit Pfeilern nur $= \frac{237}{384}$ oder beinahe $\frac{8}{13}$ des Materials der ersteren; erspart also ohngefähr $\frac{5}{13}$.

§. 59. Aufgabe. Auf eine zu beiden Seiten lothrechte Mauer, welche auf einer horizontalen Ebene steht, wirkt, wie es *Fig.* 36 im lothrechten Durchschnitt zeigt, eine Kraft P unter dem Winkel β gegen die Verticallinien; man soll das Moment dieser Kraft in Hinsicht auf die von ihr beabsichtigte Umwerfung der Mauer bestimmen.

Auflösung I. Das verlangte Moment ist

$$= P.\, c\, d, \text{ und}$$

$$cd = fg - fn$$
$$= h \,\text{Sin.}\, \beta - b \,\text{Cos.}\, \beta;$$

also dies Moment

$$= P\, h \,\text{Sin.}\, \beta - P\, b \,\text{Cos.}\, \beta.$$

Auflösung II. Man zerlege im Angriffspunct k die Kraft P in die Seitenkräfte p und q nach horizontaler und lothrechter Richtung, so hat man

$$p = P \,\text{Sin.}\, \beta;$$
$$q = P \,\text{Cos.}\, \beta$$

und das Moment, welches die Größe des Bestrebens, die Mauer umzuwerfen, ausdrückt,

$$= p.\, cr - q.\, cf =$$
$$P \,\text{Sin.}\, \beta.\, h - P \,\text{Cos.}\, \beta.\, b.$$

Dies auf Umwerfung wirkende Bestreben wird $= 0$, wenn

$P\, h \,\text{Sin.}\, \beta = P\, b \,\text{Cos.}\, \beta$, d. h. wenn

$h \,\text{tg.}\, \beta = b$ wird,

oder wenn die Verlängerung der Richtungslinie von P den Punct c trifft.

§. 60. Aufgabe. Zwischen zweien, auf einer horizontalen Ebene stehenden, zu beiden Seiten lothrechten Mauern ABGFE und DCKNM (*Fig.* 37) ist ein genau einpassender prismatischer Körper vom lothrechten Querschnitt ABCD eingesetzt, so daß die Berührungsfugen AB und DC eine gleiche geneigte Lage gegen den Horizont haben, und es also dem Gewicht dieses Körpers ABCD unmöglich machen, lothrecht herabzufallen, bevor nicht die Stabilität der Mauern überwunden ist. Man soll die erforderliche obere

Stärke AE = DM = x der Mauern fürs Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung I. Bei den in der Figur angezeigten Abmessungen, wenn die Länge = l und das Gewicht der Körper-Einheit = φ gesetzt wird, ist das Gewicht des Körpers ABCD

$$= \frac{a+b}{2} . h . l \varphi.$$

Betrachtet man dieses im Schwerpunct R des Körpers als vereint und zieht durch R eine Horizontallinie VW, so entspringen daraus in V und W auf AB und DC normal die gleichgroßen Kräfte P, P; nemlich

$$P = \tfrac{1}{2} . \frac{a+b}{2} h l \varphi \text{ Sec. } \beta,$$

und es ist nach §. 59. das Moment der Kraft P linker Hand in Beziehung auf F =

$$P . VJ \text{ Sin. } \beta - P . VL \text{ Cos. } \beta$$

$$= \tfrac{1}{2} . \frac{a+b}{2} h l \varphi \text{Sec.} \beta . \left(H - h + \frac{h}{3} \frac{b+2a}{b+a}\right) \text{Sin} \beta$$

$$- \tfrac{1}{2} . \frac{a+b}{2} h l \varphi \text{Sec.} \beta . \left(x + \tfrac{1}{3} . \frac{a-b}{2} . \frac{a+2b}{a+b}\right) \text{Cos} \beta$$

oder weil Sec. β Sin. β = tg. $\beta = \frac{2h}{a-b}$ und

$$\text{Sec. } \beta \text{ Cos. } \beta = 1 \text{ ist,}$$

so hat man dieses Moment =

$$\frac{a+b}{4} h l \varphi \left(\frac{2h(H-h)}{a-b} + \frac{2h^2(2a+b)}{3(a^2-b^2)} - \frac{(a-b)(a+2b)}{6(a+b)}\right) - \frac{a+b}{4} h l \varphi x$$

$$= n - mx.$$

Weil aber nun in Beziehung auf dieselbe Achse durch F, als um welche die Drehung erfolgen könnte, das Moment von EATF $= \frac{1}{2} x^2 H l \varphi$; das von

$$QBGT = (H - h)\frac{a-b}{2} . l \varphi . \left(x + \frac{a-b}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(H-h)(a-b) l \varphi x + \frac{1}{8}(H-h)(a-b)^2 l \varphi$$
$$= p x + q,$$

und das von AQB =

$$\frac{a-b}{4} . h l \varphi . \left(x + \frac{1}{3} . \frac{a-b}{2}\right)$$

ist, so entsteht also die Bedingungsgleichung

$$n - mx = \frac{1}{2} x^2 H l \varphi + p x + q +$$
$$\frac{a-b}{4} h l \varphi \left(x + \frac{a-b}{6}\right)$$

und hieraus ergiebt sich, nach gehöriger Reduction

$$H x^2 + [(a-b) H + b h] x + \frac{(a-b)(4b-a)}{12} h$$
$$+ \frac{(a-b)^2}{4} H - \frac{3(a+b)H - (a+2b)h}{3(a-b)} h^2 = 0.$$

Ist z. B. bei so einer freistehenden scheidrechten Ueberwölbung

$a = 12'$; $b = 10'$; $h = 2'$; $H = 12'$;

so entsteht $x = 4,65$ Fuß, also die untere Breite der Mauer beinahe $= 5 \frac{2}{3}$ Fuß.

Auflösung II. Nimmt man an, daß die Wirkung von P in der Mitte der Fugen AB und CD als vereint angesehen werden kann, so hat man das Moment

$$P \cdot VJ \, \text{Sin.}\, \beta - P \cdot VL \, \text{Cos.}\, \beta$$

$$= \tfrac{1}{2} \, \frac{a+b}{2} \, h \, l \, \varphi \, \text{Sec.}\, \beta \, . \, (H - \tfrac{1}{2} h) \, \text{Sin.}\, \beta$$

$$- \tfrac{1}{2} \, \frac{a+b}{2} \, h \, l \, \varphi \, \text{Sec.}\, \beta \, (x + \frac{a-b}{4}) \, \text{Cos.}\, \beta$$

und weil die übrigen Momente wie in I. bleiben, so entsteht die Gleichung

$$H x^2 + [(a-b)H + b h] x + \frac{(a-b)(7b-a)}{24} h$$

$$+ \frac{(a-b)^2}{4} H - \frac{(a+b)(2H-h)}{2(a-b)} h^2 = 0$$

und aus ihr ergiebt sich bei den in I. angegebenen Abmessungen

$$x = 4{,}64.$$

Die Verschiedenheit beider Resultate kann, wie man aus den Gleichungen ersieht, wenn a und b nicht viel von einander abweichen, immer nur unbedeutend ausfallen. Indessen entsteht immer die Frage: welche Ansicht ist die richtige? und um sie zu beantworten, soll die Auflösung jetzt durch Anwendung des Princips von den virtuellen Geschwindigkeiten ausgeführt werden.

Auflösung III. Nimmt man eine Senkung des Körpers ABCD nach lothrechter Richtung an *(Fig. 38)* und setzt den dieser Senkung zugehörigen Drehungswinkel der Widerlagen $= \alpha$; so beschreibt sowohl der Punct C einen Bogen CC′, als auch der Schwerpunct E des Körpers DGNM einen EE′, so wie der Q des Körpers CKGF einen QQ′, und der L des Körpers CFD einen LL′ u. s. w., und jeder dieser

Bogen gehört dem Winkel α an, welcher wieder von der Senkung $DD'' = CC''$ des Körpers ABCD abhängig ist.

Fällt man nun aus den Puncten E; E′; Q; Q′; L; L′ Normalen auf die Horizontallinie und setzt die arithmethische Differenz der ersten beiden Linien $= e$; der zweiten beiden $= q$; der dritten beiden $= l$; so sind e; q; l die Wege, welche die Körper DGNM; CKFG; CFD ihrem ursprünglichen Bestreben entgegengesetzt durchlaufen müssen, wenn ABCD sich um den Weg CC″, seinem Ziel nähert. Nach dem Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten entspringt daher die Gleichung

$$ABCD . CC'' - 2 . DGNM . e - 2 . CKGF . q - 2 . CFD . l = 0.$$

Es ist aber, die gemeinschaftlichen Einheiten weggelassen,

1) $$ABCD = \frac{a + b}{2} h;$$

2) $$CC'' = \frac{CC' \text{ Sin. } CC' C''}{\text{Sin. } CC'' C'}$$

$$= \frac{2 . CN \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} . \text{ Sin.} (C' CC'' + CC'' C')}{\text{Sin } CC'' C'}$$

$$= 2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} (CN \text{ Sin. } C' CC'' \text{ Cotg. } CC'' C' + CN \text{ Cos. } C' CC'')$$

$$= 2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} \left(CN \text{ Sin. } [KCN + 90 - \frac{\alpha}{2}] \frac{2h}{a - b} + CN \text{ Cos. } [KCN + 90 - \frac{\alpha}{2}] \right)$$

$$= 2\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2h}{a-b}\,[\,CN\,\text{Sin.}\,KCN\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2} + CN\,\text{Cos.}\,KCN\,\text{Cos.}\,\frac{\alpha}{2}\,] + CN\,\text{Cos.}\,KCN\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2} - CN\,\text{Sin.}\,KCN\,\text{Cos.}\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2h}{a-b}\,[\,(x+\frac{a-b}{2})\,\text{Sin}\,\frac{\alpha}{2} + (H-h)\,\text{Cos}\,\frac{\alpha}{2}\,] + (H-h)\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2} - (x+\frac{a-b}{2})\,\text{Cos.}\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

oder, weil $2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha = \text{Sin.}\,\alpha$ ist,

$$CC'' = \left(\frac{2h}{a-b}\,2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \text{Sin}\,\alpha\right)x + H\,2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \left(\frac{2h\,(H-h)}{a-b} - \frac{a-b}{2}\right)\text{Sin.}\,\alpha$$

3) $DGNM = Hx.$

4) $e = NE'\,\text{Sin.}\,(\alpha + ENK) - \frac{H}{2}$

$$= NE\,\text{Cos.}\,ENK\,\text{Sin.}\,\alpha + NE\,\text{Sin.}\,ENK\,\text{Cos.}\,\alpha - \frac{H}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x\,\text{Sin.}\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,H\,\text{Cos.}\,\alpha - \frac{H}{2}$$

oder, weil $1 - \text{Cos.}\,\alpha = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2$ ist,

$$e = \tfrac{1}{2}\,x\,\text{Sin.}\,\alpha - H\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

5) $CKGF = \frac{a-b}{2}\,(H-h)$

6) $q = NQ'\,\text{Sin.}\,(\alpha + QNK) - \frac{H-h}{2}$

$$= NQ\,\text{Cos.}\,QNK\,\text{Sin.}\,\alpha + NQ\,\text{Sin.}\,QNK\,\text{Cos.}\,\alpha - \frac{H-h}{2}$$

$$= \left(x + \frac{a-b}{4}\right)\text{Sin}\,\alpha + \frac{H-h}{2}\,\text{Cos.}\,\alpha - \frac{H-h}{2}$$

$$= x\,\text{Sin.}\,\alpha + \frac{a-b}{4}\,\text{Sin.}\,\alpha - (H-h)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

7) $\quad CFD = \frac{\overline{a-b}^2}{4}\,h;$

8) $\quad l = NL'\,\text{Sin.}\,(\alpha + LNK) - (H - \tfrac{2}{3}h)$

$$= NL\,\text{Cos.}\,LNK\;\text{Sin.}\,\alpha + NL\;\text{Sin.}\,LNK\;\text{Cos.}\,\alpha - (H - \tfrac{2}{3}h)$$

$$= \left(x + \frac{a-b}{6}\right)\text{Sin.}\,\alpha + (H - \tfrac{2}{3}h)\,\text{Cos.}\,\alpha - (H - \tfrac{2}{3}h)$$

$$= x\,\text{Sin.}\,\alpha + \frac{a-b}{6}\,\text{Sin.}\,\alpha - \frac{3H-2h}{3}.\;2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Substituirt man nun diese Werthe in obige Gleichung, so entsteht nach gehöriger Reduction

$$Hx^2 + \left([a-b]\,H + bh - [H^2 + \frac{a+b}{a-b}h^2]\,\text{tg.}\,\frac{\alpha}{2}\right)x$$
$$+ \frac{(a-b)(5b+a)}{12}h + \frac{(a-b)^2}{4}H - \frac{a+b}{a-b}h^2(H-h)$$
$$- \left(\frac{(a-b)(H-h)^2}{2} + \frac{(a-b)(3H-2h)h}{6} + \frac{(a+b)hH}{2}\right)\text{tg.}\,\frac{\alpha}{2}. = 0$$

und hieraus, wenn $\alpha = 0$ ist, also für den ersten Augenblick des Bestrebens zu Bewegung,

$$Hx^2 + [(a-b)H + bh]\,x + \frac{(a-b)(5b+a)h}{12} + \frac{(a-b)^2H}{4} - \frac{(a+b)(H-h)h^2}{a-b} = 0.$$

Beim vorigen Beispiel liefert diese Gleichung

$$x = 4,27.$$

Anmerkung. Bei der Ansicht wie in I. und II. entsteht dasselbe nur allein vollkommen richtige allgemeine Resultat wie hier in III., wenn man die Wirkung des Körpers ABCD sich in den Puncten B und C vereinigt vorstellt, allerdings eine beim ersten Anblick auffallende Erscheinung.

§. 61.

§. 61. Aufgabe. Ein halbkreisförmiges concentrisches Gewölbe (*Fig* 39) ruht auf zwei Widerlagern; man soll die nöthige Stärke derselben fürs Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung I. Angenommen, in den Fugen AB und CD, welche beide mit der Verticale den Bogen (für den Halbmesser 1) β bilden, fände eine Trennung der Gewölbsteine statt, so daß also der Körper ABCD zu beiden Seiten das Widerlager nebst dem übrigen Theil des Gewölbes umwerfen würde, wenn die Stabilität zu schwach wäre, so wird, wenn man eine Senkung des Körpers ABCD, lothrecht herab, bis zur Lage $A'B'C'D'$ voraussetzt, das Widerlager nebst dem übrigen Theil des Gewölbes rechter Hand, also der Körper CDGHKJF in die Lage $C''D''G''H''KJ''F''$ treten. Sind nun M, N die Schwerpuncte der Körper CDGF; FHKJ in der ursprünglichen, M'', N'' die, in der neuen Lage, und setzt man, wenn z das Ziel dieser Kräfte (also den Mittelpunct der Erde) ausdrückt, $M''z - Mz = m$; $N''z - Nz = n$; so hat man nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung

$$ABCD.\,CC' - 2.\,FHKJ.\,n - 2\,CDGF.\,m = 0.$$

Es ist aber, wenn $FJ = h$; $JK = x$; $EA = r$; $EB = \varrho$, und der Drehungswinkel um $K = \alpha$ gesetzt wird,

$$ABCD = (r^2 - \varrho^2).\beta;\ CDFG = (r^2 - \varrho^2)\,\frac{\frac{1}{2}\pi - \beta}{2};$$

$$FHKJ = hx;$$

$$CC' = CC'' \text{Sin. } ECC'' \text{ Cosec. } \beta$$

$$= 2\, CK \text{Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha. \text{ Sin. } (ECK + 90 - \tfrac{\alpha}{2}) \text{ Cosec. } \beta$$

$$= 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha \text{ Cosec. } \beta \,(CK \text{ Sin. } ECK \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$+ CK \text{ Cos. } ECK \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2})$$

$$= 2 \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2} \text{ Cosec. } \beta \,[CK \text{Sin.} (\beta + KCC') \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$+ CK \text{ Cos. } (\beta + KCC') \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2}]$$

$$= \frac{2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2}}{\text{Sin. } \beta} \Big(\text{Sin. } \beta .\ CK \text{ Cos. } KCC' \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$+ \text{Cos. } \beta .\ CK \text{ Sin. } KCC' \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$+ \text{Cos. } \beta .\ CK \text{ Cos. } KCC' \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$- \text{Sin. } \beta .\ CK \text{ Sin. } KCC' \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2} \Big)$$

$$= \frac{2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} (\text{Cos. } \beta \text{ Cos. } \frac{\alpha}{2} + \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2})}{\text{Sin. } \beta} CK \text{ Cos. } KCC'$$

$$- \frac{2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} (\text{Sin. } \beta \text{ Cos. } \frac{\alpha}{2} - \text{Cos. } \beta \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2})}{\text{Sin. } \beta} CK \text{ Sin. } KCC'$$

$$= 2 \text{Sin. } \tfrac{\alpha}{2} \,(\text{Cotg. } \beta \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2} + \text{Sin. } \tfrac{\alpha}{2}) . (h + \varrho \text{ Cos. } \beta)$$

$$- 2 \text{Sin. } \tfrac{\alpha}{2} (\text{Cos. } \tfrac{\alpha}{2} - \text{Cotg. } \beta \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}) \,(x + \varrho - \varrho \text{ Sin. } \beta)$$

$$= 2 \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2} \,(\text{Cotg. } \beta \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2} + \text{Sin. } \tfrac{\alpha}{2})\, h$$

$$- 2 \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2} \,(\text{Cos. } \tfrac{\alpha}{2} - \text{Cotg. } \beta \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2})\, x$$

$$+ 2 \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2} \,[\text{Cos. } \beta \text{ Cotg. } \beta \text{ Cos. } \tfrac{\alpha}{2} + \text{Cos. } \beta \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}$$

$$- (\text{Cos. } \tfrac{\alpha}{2} - \text{Cotg. } \beta \text{ Sin. } \tfrac{\alpha}{2}) \,(1 - \text{Sin. } \beta)]\, \varrho$$ oder

$$CC' = \text{Sin.}\,\alpha\,(\text{Cotg.}\,\beta + \text{tg.}\,\frac{\alpha}{2})\,h$$

$$- \text{Sin.}\,\alpha\,(1 - \text{Cotg.}\,\beta\;\text{tg.}\,\frac{\alpha}{2})\,x$$

$$+ \text{Sin.}\,\alpha\,(\text{Cosec.}\,\beta - 1 + \text{Cotg.}\,\beta\;\text{tg.}\,\frac{\alpha}{2})\,\varrho;$$

$$n = N''K\;\text{Sin.}\,(\alpha + NKJ) - NK.\;\text{Sin.}\;NKJ$$

$$= NK\;\text{Sin.}\,\alpha\;\text{Cos.}\;NKJ + NK\;\text{Cos.}\,\alpha\;\text{Sin.}\;NKJ$$

$$- NK\;\text{Sin.}\;NKJ;\ \text{oder}$$

$$n = \tfrac{1}{2}\,x\;\text{Sin.}\,\alpha - (1 - \text{Cos.}\,\alpha)\,\tfrac{1}{2}\,h;$$

$$m = M''K\;\text{Sin.}\,(\alpha + MKJ) - MK\;\text{Sin.}\;MKJ$$

$$= MK\;\text{Sin.}\,\alpha\;\text{Cos.}\;MKJ + MK\;\text{Cos.}\,\alpha\;\text{Sin.}\;MKJ$$

$$- MK\;\text{Sin.}\;MKJ$$

$$= \text{Sin.}\,\alpha.\,MK\;\text{Cos.}\,MKJ - (1 - \text{Cos.}\,\alpha).\,MK\;\text{Sin.}\,MKJ.$$

Nun ist aber nach §. 23.

$$EM = \tfrac{2}{3}.\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}\,.\,\frac{r^3 - \varrho^3}{r^2 - \varrho^2}$$

oder $r^3 - \varrho^3 = a^3$; und $r^2 - \varrho^2 = b^2$ gesetzt,

$$EM = \tfrac{2}{3}.\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}\,.\,\frac{a^3}{b^2};$$

folglich die Projection von EM auf der Horizontale

$$= EM\;\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \beta)$$

$$= \frac{2\,a^3}{3\,b^2}\,.\,\frac{\text{Sin.}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}{\frac{1}{2}\pi - \beta} = \frac{2\,a^3\;\text{Cos.}\,\beta}{3\,b^2\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}$$

und die, auf der Verticale,

$$= EM\;\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \beta)$$

$$= \frac{2\,a^3}{3\,b^2}\,.\,\frac{1 - \text{Cos.}\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}{\frac{1}{2}\pi - \beta}$$

$$= \frac{2\,a^3\,(1 - \text{Sin.}\,\beta)}{3\,b^2\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)};$$

folglich $MK\;\text{Cos.}\;MKJ = x + \varrho - \frac{2\,a^3\;\text{Cos.}\,\beta}{3\,b^2\,(\frac{1}{2}\pi - \beta)}$

und $MK \, Sin. \, MKJ = h + \frac{2a^3 (1 - Sin. \beta)}{3b^2 (\frac{1}{2}\pi - \beta)}$; daher

$$m = x \, Sin. \, \alpha + \varrho \, Sin. \, \alpha - \frac{2a^3 \, Cos. \beta \, Sin. \, \alpha}{3b^2 (\frac{1}{2}\pi - \beta)}$$

$$- (1 - Cos. \, \alpha) \, h - \frac{2a^3 (1 - Sin. \beta)(1 - Cos. \alpha)}{3b^2 (\frac{1}{2}\pi - \beta)}$$

$$= x \, Sin. \, \alpha + \varrho \, Sin. \, \alpha - h \, (1 - Cos. \alpha)$$

$$- \frac{2a^3 [Sin. \alpha \, Cos. \beta + (1 - Sin. \beta)(1 - Cos. \alpha)]}{3b^2 (\frac{1}{2}\pi - \beta)}$$

Setzt man nun alle diese Werthe in die obige Bedingungsgleichung, so entsteht, die Gleichung durch $Sin. \, \alpha$ dividirt, und $tg. \frac{1}{2}\alpha$ für $\frac{1 - Cos. \alpha}{Sin. \alpha}$ gesetzt,

$$b^2 h \beta (Cotg. \beta + tg. \frac{\alpha}{2}) - b^2 x \beta (1 - Cotg. \beta \, tg. \frac{\alpha}{2})$$

$$+ b^2 \varrho \beta (Cosec. \beta - 1 + Cotg. \beta \, tg. \frac{\alpha}{2})$$

$$= hx^2 - h^2 x \, tg. \frac{1}{2}\alpha + b^2 x (\frac{1}{2}\pi - \beta)$$

$$+ b^2 \varrho (\frac{1}{2}\pi - \beta) - b^2 h (\frac{1}{2}\pi - \beta) tg. \frac{1}{2}\alpha$$

$$- \frac{2}{3} \alpha^3 [Cos. \beta + (1 - Sin. \beta) tg. \frac{\alpha}{2}]$$

oder, geordnet,

$$hx^2 + [\frac{1}{2}\pi b^2 - (h^2 + b^2 \beta \, Cotg. \beta) tg. \frac{\alpha}{2}] x + \frac{1}{2}\pi b^2 \varrho$$

$$- (\frac{2}{3} a^3 \, Cos. \beta + b^2 h \beta \, Cotg. \beta + b^2 \varrho \beta \, Cosec. \beta)$$

$$- [\frac{1}{2}\pi b^2 h + \frac{2}{3} a^3 (1 - Sin \beta) + b^2 \varrho \beta \, Cotg \beta] \, tg. \frac{\alpha}{2} = 0$$

Wird nun $\alpha = 0$ genommen, so hat man für den ersten Augenblick des Bestrebens zur Bewegung

$$hx^2 + \frac{1}{2}\pi b^2 x + \frac{1}{2}\pi b^2 \varrho - (\frac{2}{3} a^3 \, Cos. \beta$$
$$+ b^2 h \beta \, Cotg. \beta + b^2 \varrho \beta \, Cosec. \beta) = 0.$$

Auflösung II. Es ist das Gewicht des Körpers ABCD $= b^2 \beta$, und aus ihm entspringt normal auf jede der Fugen AB und CD ein Druck

$$= \tfrac{1}{2} b^2 \beta . \text{ Cosec. } \beta,$$

und nimmt man diesen auf jeder Seite in den Endpuncten B und C der Fugen als vereint an, so ist, in Beziehung auf die, im Fall einer Umwerfung entstehende Drehachsen durch K und Q, das Moment dieser Seitenkraft nach §. 59.

$$= \tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cosec. } \beta \, (h + \varrho \text{ Cos.} \beta) \text{ Cos. } \beta -$$

$$\tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cosec. } \beta \, (x + \varrho - \varrho \text{ Sin.} \beta) \text{ Sin.} \beta$$

$$= \tfrac{1}{2} b^2 \beta h \text{ Cotg.} \beta - \tfrac{1}{2} b^2 \beta x - \tfrac{1}{2} b^2 \beta \varrho + \tfrac{1}{2} b^2 \beta \varrho \text{ Cosec.} \beta$$

Ferner ist das Widerstands-Moment des Körpers FHKJ $= hx . \tfrac{1}{2} x$; und das des Körpers CDFG =

$$b^2 \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{2}\pi - \beta) \left(x + \varrho - \frac{2a^3}{3b^2} . \frac{\text{Cos. } \beta}{\tfrac{1}{2}\pi - \beta} \right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi b^2 x - \tfrac{1}{2} b^2 \beta x + \tfrac{1}{2} b^2 \varrho (\tfrac{1}{2}\pi - \beta) - \tfrac{1}{2} . \frac{2a^3}{3} \text{ Cos. } \beta .$$

Fürs Gleichgewicht muß also

$$\tfrac{1}{2} b^2 h \beta \text{ Cotg.} \beta - \tfrac{1}{2} b^2 \beta x - \tfrac{1}{2} b^2 \beta \varrho + \tfrac{1}{2} b^2 \beta \varrho \text{ Cosec.} \beta =$$
$$\tfrac{1}{2} hx^2 + \tfrac{1}{4}\pi b^2 x - \tfrac{1}{2} b^2 \beta x + \tfrac{1}{4} b^2 \varrho \pi - \tfrac{1}{2} b^2 \varrho \beta - \tfrac{1}{2} . \tfrac{2}{3} a^3 \text{ Cos.} \beta$$

sein, und hieraus entspringt die geordnete Bedingungsgleichung

$$hx^2 + \tfrac{1}{2}\pi b^2 x + \tfrac{1}{2}\pi b^2 \varrho - (\tfrac{2}{3} a^3 \text{ Cos.} \beta + b^2 h \beta \text{ Cotg.} \beta$$
$$+ b^2 \varrho \beta \text{ Cosec.} \beta) = 0$$

ganz so, wie in der ersten, unläugbar richtigen Auflösung.

Es erhellet hieraus, daß man nicht, wie es gewöhnlich geschah, die Wirkung des Kör-

pers ABCD in der Mitte der Fugen AB und CD als vereint ansehen darf, sondern in den Endpuncten B und C derselben.

Es entsteht nun nur noch die Frage: welcher Werth von β derjenige ist, für welchen, wenn unter ihm eine Trennung der Gewölbsteine erfolgte, die stärksten Widerlager, zur Erhaltung des Gleichgewichts, erforderlich sind. Diese Frage wird in der folgenden Aufgabe beantwortet.

§. 62. Aufgabe. Diejenige Stärke der Widerlager, also denjenigen Werth von x zu bestimmen, für welchen die Widerlager, auch bei der nachtheiligsten Stelle der Brechungsfugen, dennoch das Gleichgewicht erhalten.

Auflösung. Aus §. 61. folgt die Bedingungsgleichung

$$hx^2 + \tfrac{1}{2}\pi b^2 x + \tfrac{1}{2}\pi b^2 \varrho = \tfrac{2}{3} a^3 \text{Cos.}\beta + b^2 h \beta \text{ Cotg.}\beta + b^2 \varrho \beta \text{ Cosec.}\beta$$

und sie liefert offenbar für x den größtmöglichsten Werth für dasjenige β, welches

$$R = \tfrac{2}{3} a^3 \text{ Cos.}\beta + b^2 h \beta \text{ Cotg.}\beta + b^2 \varrho \beta \text{ Cosec.}\beta$$

zu einem Maximum macht. Man hat also die Bedingungsgleichung

$$R = \tfrac{2}{3} a^3 \text{Cos.}\beta + b^2 h \beta \text{ Cotg.}\beta + b^2 \varrho \beta \text{ Cosec}\beta = \text{Max.}$$

Die gewöhnliche Entwickelung derselben führt aber zu ausnehmenden Weitläuftigkeiten, und nur eine eigene Betrachtung, ein besonderer Schluß liefert auf leichten Weg das einfache Resultat. Dieser Schluß

ist folgender: wenn jedes der drei Glieder des Werths für R zufällig für dasselbe β ein Max. wird, so ist auch die ganze Summe, d. h. R selbst für dieses β ein Max.

Es ist aber das erste Glied $\frac{2}{3}$ a³ Cos. β offenbar ein Größtes für $\beta = 0$, nemlich $= \frac{2}{3} a^3$. In Beziehung auf das zweite Glied hat man

$$P = \beta \text{ Cotg. } \beta = \text{Max.}; \text{ also}$$

$$\frac{dP}{d\beta} = - \beta . \text{ Cosec. } \beta^2 + \text{Cotg. } \beta = 0$$

und hieraus

$$\beta = \text{Sin. } \beta \text{ Cos. } \beta; \text{ also}$$

$$2\beta = \text{Sin. } 2\beta; \text{ folglich}$$

$$2\beta = 0; \text{ also auch}$$

$$\beta = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2P}{d\beta^2} = 2 . \left(\frac{\beta \text{ Cotg. } \beta - 1}{\text{Sin. } \beta^2} \right)$$

also, für $\beta = 0$,

$$\frac{d^2P}{d\beta^2} = -2$$

demnach ist $b^2 h \beta$ Cotg. β ebenfalls ein Größtes für $\beta = 0$.

Setzt man nun den Werth, welchen β Cotg. β oder $\frac{\beta}{\text{tg.} \beta}$ für $\beta = 0$ annimmt $= P'$; so hat man

$$P' = \frac{d\beta}{\text{sec. } \beta^2 \, d\beta} = \text{Cos. } \beta^2 \text{ für } \beta = 0;$$

also $P = 1$; daher das zweite Glied selbst, für dieses β

$$= b^2 h.$$

In Beziehung auf das dritte Glied

$b^2 \varrho \beta$ Cosec. β hat man

$$Q = \beta \text{ Cosec. } \beta = \frac{\beta}{\text{Sin. } \beta} = \text{Max.};$$

also $$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{\text{Sin. } \beta - \beta \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } \beta^2} = 0;$$

folglich $\beta = \text{tg. } \beta$; also ebenfalls

$$\beta = 0;$$

und $$\frac{d^2 Q}{d\beta^2} = - \text{ für } \beta = 0;$$

daher ist auch $b^2 \varrho \beta$ Cosec. β ein Größtes für $\beta = 0$. Wird nun der Werth, welchen β Cosec. β für $\beta = 0$ annimmt, gleich Q' gesetzt, so hat man

$$Q' = \frac{d\beta}{d \text{ Sin. } \beta} = \frac{1}{\text{Cos. } \beta} \text{ für } \beta = 0;$$

also $Q' = 1$; folglich

$$b^2 \varrho \beta \text{ Cosec. } \beta = b^2 \varrho.$$

Es wird daher R ein Größtes für $\beta = 0$ und der Werth dieses Maximums ist =

$$\tfrac{2}{3} a^3 + b^2 h + b^2 \varrho.$$

Dasjenige x also, welches der Gleichung

$$hx^2 + \tfrac{1}{2}\pi b^2 x + \tfrac{1}{2}\pi b^2 \varrho - (\tfrac{2}{3} a^3 + b^2 h + b^2 \varrho) = 0$$

entspricht, giebt die größte Stärke des Widerlagers, also die, für den nachtheiligsten Fall, erforderliche, an. Es ergiebt sich als allgemeine Formel für die hieher gehörigen Fälle

$$x = \frac{-\pi b^2 + \sqrt{\pi b^2 (\pi b^2 - 8 h \varrho) + 16 h [\tfrac{2}{3} a^3 + b^2 (h + \varrho)]}}{4 h}$$

in welcher Formel

a^3 die Größe $r^3 - \varrho^3$ und

b^2 die $r^2 - \varrho^2$ bezeichnet.

Es sei z. B. $r = 12'$; $\varrho = 10'$; $h = 10'$; so erhält man

$$x = 5,45 \ldots$$

Nimmt man den Seitendruck in der Mitte der Fugen als vereint an, so ergiebt sich, ebenfalls für $\beta = 0$, bei denselben Abmessungen,

$$x = 5,6 \ldots$$

§. 63. Aufgabe. Zwischen zweien auf einer horizontalen Ebene stehenden lothrechten Widerlagern (*Fig.* 40) befindet sich ein kreisförmiges, dem Bogen (zum Halbmesser = 1) 2δ zugehöriges concentrisches Gewölbstück; man soll die Stärke der Widerlager fürs Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich in den Fugen AB, CD, deren Neigung gegen die Verticale $= \beta$ sein mag, eine Trennung der Gewölbsteine, so ist nach dem bisherigen, die normale Seitenwirkung auf die Fugen, in B und C als vereint anzusehen, und das Moment derselben auf jeder Seite in Beziehung auf die entstehende Drehachse durch N ist, weil die Wirkung

$$= \tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cosec. } \beta \text{ ist,}$$

bei der bisherigen, zum Theil in der Figur angedeuteten, Bezeichnung

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cosec. } \beta (h + \varrho \text{ Cos. } \beta - \varrho \text{ Cos. } \delta) \text{ Cos. } \beta \\ &\quad - \tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cosec. } \beta (x + \varrho \text{ Sin. } \delta - \varrho \text{ Sin. } \beta) \text{ Sin. } \beta \\ &= \tfrac{1}{2} b^2 \beta \text{ Cotg. } \beta (h + \varrho \text{ Cos. } \beta - \varrho \text{ Cos. } \delta) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} b^2 \beta (x + \varrho \text{ Sin. } \delta - \varrho \text{ Sin. } \beta), \end{aligned}$$

Weil nun ferner der Körper

$$CDEF = b^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \beta);\ \text{der}\ FKNP = H(x - d\,\text{Sin.}\,\delta);$$

$$r - \varrho = d;\ \text{und}\ h + d\,\text{Cos.}\,\delta = H\ \text{gesetzt};$$

$$\text{der}\ EGPM = h\,d\,\text{Sin.}\,\delta;\ \text{und der}$$

$$EFG = \tfrac{1}{2} d^2\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\delta;$$

dann die Entfernung vom Mittelpunct R bis zum Schwerpunct des concentrischen Ringstücks CDFE

$$= \frac{2a^3}{3.b^2} \cdot \frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\delta - \beta)}{\frac{1}{2}(\delta - \beta)};$$

und ihre horizontale Projection also,

$$= \frac{2a^3}{3b^2}\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\delta - \beta)}{\frac{1}{2}(\delta - \beta)}\,\text{Sin.}\,\frac{\delta + \beta}{2};$$

folglich der Hebelsarm zu CDEF

$$= x + \varrho\,\text{Sin.}\,\delta - \frac{2a^3}{3b^2} \cdot \frac{\text{Sin.}\,\frac{\delta + \beta}{2} \cdot \text{Sin.}\,\frac{\delta - \beta}{2}}{\frac{1}{2}(\delta - \beta)}$$

dann, der Hebelsarm von $FKNP = \tfrac{1}{2}(x - d\,\text{Sin.}\,\delta)$; der zu $EGPM = x - \tfrac{1}{2} d\,\text{Sin.}\,\delta$; und endlich der zu $EGF = x - \tfrac{2}{3} d\,\text{Sin.}\,\delta$ ist, so entsteht die Bedingungsgleichung

$$\tfrac{1}{2} b^2 \beta\,\text{Cotg.}\,\beta\,(h + \varrho\,\text{Cos.}\,\beta - \varrho\,\text{Cos.}\,\delta)$$

$$- \tfrac{1}{2} b^2 \beta\,(x + \varrho\,\text{Sin.}\,\delta - \varrho\,\text{Sin.}\,\beta) =$$

$$b^2 \tfrac{1}{2}(\delta - \beta)\left(x + \varrho\,\text{Sin}\,\delta - \frac{2a^3}{3b^2} \cdot \frac{\text{Sin.}\,\frac{\delta + \beta}{2} \cdot \text{Sin.}\,\frac{\delta - \beta}{2}}{\frac{1}{2}(\delta - \beta)}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2} H\,(x - d\,\text{Sin.}\,\delta)^2 + h\,d\,\text{Sin.}\,\delta\,(x - \tfrac{1}{2} d\,\text{Sin.}\,\delta)$$

$$+ \tfrac{1}{2} d^2\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\delta\,(x - \tfrac{2}{3} d\,\text{Sin.}\,\delta);$$

und aus ihr, nach gehöriger Reduction, weil

$$\text{Sin.}\,\frac{\delta + \beta}{2} \cdot \text{Sin.}\,\frac{\delta - \beta}{2} = \tfrac{1}{2}(\text{Cos.}\,\beta - \text{Cos.}\,\delta)\ \text{ist},$$

$$Hx^2 + (b^2\delta - d^2 \,\text{Sin.}\, \delta \,\text{Cos.}\, \delta)\, x + \tfrac{2}{3} a^3 \,\text{Cos.}\, \delta + b^2 \varrho \delta \,\text{Sin.}\, \delta + \tfrac{1}{3} d^3 \,\text{Sin.}\, \delta^2 \,\text{Cos.}\, \delta - [\tfrac{2}{3} a^3 \,\text{Cos.}\, \beta + b^2(h - \varrho \,\text{Cos.}\, \delta)\, \beta \,\text{Cotg.}\, \beta + b^2 \varrho\, \beta \,\text{Cosec.}\, \beta] = 0$$

Insofern nun immer, $b^2 \delta > d^2 \,\text{Sin.}\, \delta \,\text{Cos.}\, \delta$, und gewöhnlich auch, h nicht kleiner als $\varrho \,\text{Cos.}\, \delta$ ist, so ergiebt sich, ganz so wie in §. 62, für den nachtheiligsten Fall, also das größtnöthigste x, für $\beta = 0$, aus der Gleichung:

$$Hx^2 + (b^2\delta - d^2 \,\text{Sin.}\, \delta \,\text{Cos.}\, \delta)\, x + \tfrac{2}{3} a^3 \,\text{Cos.}\, \delta + b^2 \varrho \delta \,\text{Sin.}\, \delta + \tfrac{1}{3} d^3 \,\text{Sin.}\, \delta^2 \,\text{Cos.}\, \delta - [\tfrac{2}{3} a^3 + b^2(h - \varrho \,\text{Cos.}\, \delta) + b^2 \varrho] = 0$$

Setzt man hierin $\delta = \frac{1}{2}\pi$; so verwandelt sich diese Gleichung in die §. 62.

Es sei z. B. $h = 8'$ die Höhe des Bogens im Lichten $= 2'$; die Weite $= 12'$; so ist $\varrho = 10'$; und setzt man die Höhe der Gewölbsteine $= 1'$; so ist $r = 11'$; $b^2 = 21$; $a^3 = 331$; ferner $\text{Sin.}\, \delta = 0{,}6$; $\text{Cos.}\, \delta = 0{,}8$; und $\delta = 0{,}6435$; und es ergiebt sich

$$x = 3\tfrac{3}{4} \text{ Fuß.}$$

Des zweiten Abschnitts dritte Abtheilung.

Von der Wage.

---

§. 64. Erklärung. Die Wage ist ein Hebel, der dazu dient, vermittelst eines Gegengewichts, das Gewicht eines Körpers zu bestimmen. Sind die Aufhängepuncte der Last und des Gegengewichts gleich-

weit von der Drehachse entfernt, so heißt die Wage Krämerwage. Sind sie veränderlich, so heißt sie Schnellwage.

a) Von der Krämerwage.

§. 65. Lehrsatz. Bei der gemeinen oder Krämerwage muß der Schwerpunct des ganzen Systems (d. h. des Wagebalkens, der Wagschalen und der Belastung in beiden) nothwendig in derjenigen Linie, welche durch den Mittel- und Schwerpunct des Wagebalkens normal auf denselben zu ziehen ist, und zwar unterhalb der Drehachse liegen, wenn der Wagebalken, bei gleicher Größe der Last und des Gleichgewichts, eine horizontale ruhende Lage annehmen, also die Zunge zwischen den Scheeren einspielen soll.

Beweis. Läge der Schwerpunct zur Seite der erwähnten Normale, so würde bei der horizontalen Lage des Wagebalkens kein Gleichgewicht statt finden, sondern, weil in dieser Lage das Gewicht des ganzen Systems in Beziehung auf die Drehachse ein Moment hätte, so müßte nothwendig noch eine Drehung erfolgen, bis der Schwerpunct seinen tiefsten Stand lothrecht unter dem Drehpunct erreicht, der Wagebalken also eine gegen den Horizont geneigte Lage angenommen haben würde.

Läge der Schwerpunct in der Drehachse, so würde der Wagebalken nicht blos in der horizontalen, sondern in jeder Lage in Ruhe bleiben, es könnte also kein Einspielen der Zunge erfolgen.

Läge endlich der Schwerpunct oberhalb der Drehachse in der erwähnten Normale, so könnte zwar der Wagebalken in horizontaler Lage in Ruhe bleiben, aber bei der geringsten Erschütterung würde ein Moment zur Drehung entstehen, und der Wagebalken müßte gänzlich umschlagen, bis der Schwerpunct lothrecht unter die Drehachse tritt.

Da also der Schwerpunct nicht zur Seite der erwähnten Normale, nicht in und nicht oberhalb der Drehachse liegen darf, um die Bedingung des Einspielens des Wagebalkens in die horizontale Lage fürs Gleichgewicht zu erfüllen; so kann er in dieser Normale nur unterhalb der Drehachse liegen, denn nur in dieser Lage wird der Wagebalken seine horizontale Lage immer wieder einnehmen müssen, wenn auch eine Erschütterung ihn daraus gebracht hätte, weil nur in dieser Lage, bei Voraussetzung von gleicher Belastung, das ganze System kein Moment hat.

§. 66. Aufgabe. Es sei ABCD *(Fig. 41)* der Wagebalken; durch d gehe normal auf die Ebene des Papieres die Drehachse; mn, durch d gezogen, sei mit AC und BD parallel und horizontal; lothrecht herab durch AB und CD hängen in gleich schweren Wagschalen, gleich große Gewichte; dg sei lothrecht, also normal auf mn, und g der Schwerpunct des Wagebalkens nebst den Wagschalen und den gleichen Gewichten in ihnen. Die Summe dieser eben genannten Gewichte sei P; dm = dn = a; dg = b. Wenn nun in eine der beiden Wagschalen, etwa in

die rechter Hand eine Gewichts-Zulage = Q gelegt wird, und durch diese die Puncte n, m, g an die Stellen n′; m′; g′ verrückt werden, wie groß wird der diesem Q entsprechende Ausschlag, d. h. der Winkel β sein, welchen jetzt der Wagebalken mit dem Horizont oder die Zunge mit der Verticale oder Scheere bildet?

Auflösung. In der neuen Lage hat P, durch g′ lothrecht herab wirkend, in Beziehung auf die Drehachse durch d den Hebelsarm b Sin. β, und Q, wenn B und D die Aufhängepuncte sind, und nD = c gesetzt wird, hat den a Cos. β — c Sin. β; folglich hat man die Gleichung

$$Pb \operatorname{Sin.} \beta = Q (a \operatorname{Cos.} \beta - c \operatorname{Sin.} \beta)$$

also

$$\operatorname{tg.} \beta = \frac{Qa}{Pb + Qc}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich folgende Gesetze:

1stens. Je länger a, oder je länger der Wagebalken ist, desto größer ist bei einerlei Uebergewicht Q der Ausschlag, desto empfindlicher also die Wage.

2tens. Je kleiner P, d. h. je leichter die Wage gearbeitet ist, desto empfindlicher ist sie, jedoch nicht in geometrischem Verhältniß mit P.

3tens. Je kleiner b ist, d. h. je näher der Schwerpunct am Drehpunct liegt, desto empfindlicher ist die Wage. Es ist also gut, wenn bei der

leeren Wage der Schwerpunct in die Drehachse fällt.

4tens. Je kleiner c ist, d. h. je näher D an n, oder noch besser, je höher D über n liegt, desto empfindlicher ist die Wage.

5tens. Insofern $\frac{Qa}{Pb + Qc} =$

$$\frac{a}{c} - \frac{abP}{c(Qc + Pb)}$$ ist,

so folgt auch, daß der Ausschlag mit Q wächst.

6tens. Für b = o wird tg. β eine beständige Größe $= \frac{a}{c}$, also unabhängig von der Gewichtszulage Q.

7tens. Für b = o und c = o wird

$$\text{tg.}\ \beta = \infty;\ \text{also}\ \beta = 90^\circ,$$

d. h. der Wagebalken tritt in eine verticale Lage.

8tens. Macht man b = o und c negativ, d. h. bringt man die Aufhängepuncte oberhalb nm an, so wird tg. β negativ, d. h. der Wagebalken senkt sich mit der andern Seite, aber bei jeder Zulage in dieselbe Neigung.

9tens. Macht man c = o; so wird

$$\text{tg.}\ \beta = \frac{aQ}{bP}$$

und der Ausschlag wächst mit a und mit Q und nimmt ab, wenn b und P größer werden.

Es ist also, wenn man eine recht empfindliche Wage haben will,

a so groß wie möglich,

P (ohne die Gewichte in den Wagschalen) so klein wie möglich,

b so klein wie möglich,

c negativ, und so groß wie möglich, doch nur so groß höchstens zu machen, daß $Q.c < Pb$ wird, damit kein entgegengesetzter Ausschlag erfolgt, welcher zu Irrungen veranlassen könnte.

§. 67. Aufgabe. Eine gemeine Wage, welche unbelastet, richtig einspielt, ist dadurch unrichtig, daß die Drehachse nicht in der Mitte des Wagebalkens befindlich ist. Man soll durch sie dennoch das richtige Gewicht x einer Last bestimmen.

Auflösung. Angenommen, wenn x in der Wagschale rechter Hand liegt, so sei links das Gegengewicht R; und wenn x links eingelegt wird, so sei rechts das Gegengewicht W nöthig; außerdem sei der Hebelsarm rechts = r, links = l, so ist

1) $r.x = R.l$

2) $l.x = W.r$

und hieraus $x = \sqrt{R.W}$.

b) Von der Schnellwage.

§. 68. Aufgabe. Es sei AB = a *(Fig. 42)* der Wagebalken; in A sei die Wageschale aufgehängt, und das Gewicht des Wagebalkens und der Wagschale sei = R; der Schwerpunct befinde sich zwischen

A

A und B in der Entfernung b von A; C sei der Drehpunct, also der Ort der Zunge und AC = c. Wird eine Last von der Größe Q in die Wagschale gelegt, so erfordere sie, damit der Wagebalken in horizontale Lage tritt, also die Zunge einspielt, in D ein Gegengewicht = P, und AD sei = x; man soll diese Größen untereinander vergleichen.

Auflösung. Macht man die Momente in Beziehung auf A, so entsteht

$$(P + Q + R)\,c = Px + R.b$$

und hieraus ist

$$x = \frac{(P + Q + R)\,c - R.b}{P}; \text{ oder}$$

$$x = c + \frac{c - b}{P} R + c\,\frac{Q}{P}; \text{ ferner}$$

$$P = \frac{(Q + R)\,c - R\,b}{x - c}.$$

§. 69. Zusatz. 1) Legt man statt Q nach der Reihefolge 2 Q; 3 Q; 4 Q; etc. in die Wagschale, und setzt die zugehörigen Entfernungen des unveränderlichen Gegengewichts P von A

$$= x'; \; x''; \; x'''; \text{ u. s. w.};$$

so hat man nach dem vorigen §.

$$x = c + \frac{c - b}{P} R + \frac{c}{P}.Q$$

$$x' = c + \frac{c - b}{P} R + \frac{c}{P}.2Q$$

$$x'' = c + \frac{c - b}{P} R + \frac{c}{P}.3Q$$

$$x''' = c + \frac{c - b}{P} R + \frac{c}{P}.4Q$$

u. s. w. folglich

$$x' - x = x'' - x' = x''' - x'' = \text{u. s. w.}$$
$$= \frac{c}{p} \cdot Q$$

Die Theile auf dem Wagebalken müssen also alle einerlei Größe erhalten.

2) Für $Q = o$ entsteht

$$x = c + \frac{c - b}{p} R;$$

und es muß also, wenn für $Q = o$, P noch rechts C hängen, also der Nullpunct der Eintheilung rechts c liegen soll,

$$c > b \text{ sein, d. h.}$$

der Schwerpunct des Wagebalkens und der Wageschale muß zwischen dem Aufhängepunct A der letzteren und der Drehachse C liegen.

3) Setzt man a für x, so ergiebt sich für das Gegengewicht P die größte abzuwiegende Last

$$= \frac{P(a - c) - R(c - b)}{c}$$

und wenn diese die Gewichts-Einheit durch eine ganze Zahl ausdrückt, so kann man nun die Länge vom Nullpunct bis zu diesem Endpunct in

$$\frac{P(a - c) - R(c - b)}{c}$$

gleiche Theile abtheilen, um für jede Menge von Gewichts-Einheiten unter der größten abzuwiegenden Last den jedesmaligen Punct fürs Gegengewicht P zu erhalten.

4) Soll dieselbe Eintheilung dazu dienen, die Gewichte der vielfachen Lasten anzugeben, so muß

man P ändern, und bezeichnet P′ dasjenige Gegengewicht, welches gebraucht werden muß, wenn das n fache der bemerkten Zahlen die Größe der damit im Gleichgewicht stehenden Last ausdrücken soll, so hat man

$$P' = \frac{(nQ + R)\,c - Rb}{x - c}\text{; oder}$$

$$P' = nP - (n - 1) \cdot \frac{c - b}{x - c} R.$$

5) Soll dieselbe Eintheilung dazu dienen, das Gewicht einer Last dadurch zu bestimmen, daß man zu der durch die Eintheilungszahl bestimmten Größe, jedesmal noch eine unveränderliche Größe W addiren muß, so bringe man in B noch ein Vorhängegewicht y von der Größe

$$\frac{c}{a - c} W \text{ an.}$$

§. 70. Aufgabe. Der Wagebalken rd ist in d unter einem festen Winkel φ mit einer Stange df (*Fig.* 43) und mit dieser Stange df ist in f ebenfalls unter irgend einem festen Winkel γ wieder eine Stange ft so verbunden, daß das Ganze in eine Ebene fällt; das Gewicht dieser gesammten Verbindung incl. der zum Gegengewicht dienenden Kugel in r und der in d lothrecht herab hängenden leeren Wageschale sei = P; der Schwerpunct von P sei in n; g sei die Stelle für die Drehachse; gd = b; gn = a und der spitzige Winkel, welchen gn und die Verlängerung von dg bilden, sei = α. Es soll

aus dem in die Wageschale zu legenden Gewicht Q der Last

1stens der Winkel β, welchen der Hebelsarm $gd = b$ dann mit dem Horizont bilden (*Fig.* 44),

2tens die Entfernung $fk = x$, welche die lothrechte Linie dw von ft abschneiden wird, bestimmt werden.

Auflösung. Der Hebelsarm von Q wird $b \text{ Cos. } \beta$; der von P aber $a \text{ Cos. } (\beta - \alpha)$; und die Gleichung ist also

$$P a \text{ Cos. } (\beta - \alpha) = Q b \text{ Cos. } \beta.$$

Aus ihr ergiebt sich

1stens $$\text{tg. } \beta = \frac{Q b - a P \text{ Cos. } \alpha}{a P \text{ Sin. } \alpha}.$$

Wird nun $df = c$ gesetzt, so verhält sich

$$c : x = \text{Sin. } (90 - \beta + \varphi - \gamma) : \text{Sin. } (90 - \beta + \varphi)$$

und hieraus ist

$$x = c. \frac{\text{Cos. } (\beta - \varphi)}{\text{Cos. } [\beta - (\varphi - \gamma)]}$$

$$= c \frac{\text{Cos } \beta \text{ Cos. } \varphi + \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } \varphi}{\text{Cos. } \beta \text{ Cos } (\varphi - \gamma) + \text{Sin. } \beta \text{ Sin } (\varphi - \gamma)}; \text{ oder}$$

$$x = c. \frac{\text{Cos. } \varphi + \text{Sin. } \varphi \text{ tg. } \beta}{\text{Cos. } (\varphi - \gamma) + \text{Sin. } (\varphi - \gamma) \text{ tg. } \beta}$$

und wenn man hierin den in 1) gefundenen Werth für $\text{tg. } \beta$ substituirt, so entsteht

2tens $$x = c. \frac{a P \text{ Sin. } (\alpha - \varphi) + b Q \text{ Sin. } \varphi}{a P \text{ Sin. } (\alpha + \gamma - \varphi) + b Q \text{ Sin. } (\varphi - \gamma)}$$

§. 71. Aufgabe. Bei der im vorigen §. angegebenen Wage die Einrichtung so zu treffen, daß für jedes Q bei einer und derselben Gewichtszulage R

der Abstand x um gleichviel wachse, also unabhängig von Q sei.

Auflösung. Für die Last Q ist nach dem vorigen §.

$$x = c. \frac{a P \, Sin. (\alpha - \varphi) + b Q \, Sin. \varphi}{a P \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) + b Q \, Sin. (\varphi - \gamma)}$$

und, wenn nun, bei Einlegung der Zulage R in die Wageschale, x um z wächst, so ist also

$$x + z = c. \frac{a P \, Sin. (\alpha - \varphi) + b (Q + R) \, Sin. \varphi}{a P \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) + b (Q + R) \, Sin. (\varphi - \gamma)};$$

folglich, wenn man subtrahirt, und reducirt

$$Z = [a b c P R. [Sin. \varphi \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) - Sin. (\alpha - \varphi) Sin. (\varphi - \gamma)]] : [a P \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) [a P \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) + b R \, Sin. (\varphi - \gamma)] + b^2 Q \, Sin. (\varphi - \gamma)^2 (Q + R) + 2 a b P Q \, Sin. (\varphi - \gamma) \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi)]$$

Soll nun z unabhängig von Q sein; so hat man die Bedingungsgleichung

$$b^2 Q \, Sin. (\varphi - \gamma)^2 (Q + R) + 2 a b P Q \, Sin. (\varphi - \gamma) \, Sin. (\alpha + \gamma - \varphi) = 0$$

für jeden Werth von Q; folglich

$$Sin. (\varphi - \gamma) = 0;$$

also $\varphi = \gamma$

oder $gd \ddagger ft.$

§. 72. Zusatz. Für $\varphi = \gamma$ entsteht nun

$$x = c \left(Cos. \varphi - Sin. \varphi \, Cotg. \alpha + \frac{b Q \, Sin. \varphi}{a P \, Sin. \alpha} \right)$$

und $$z = \frac{b c R \, Sin. \varphi}{a P \, Sin. \alpha}.$$

Soll f der Nullpunct der Eintheilung werden; so muß x = o sein, wenn Q = o ist, und man hat also

$$o = c\,(\text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cotg.}\,\alpha + o);$$

folglich $\varphi = \alpha$.

Setzt man ft = l; so ergiebt sich die größte abzuwiegende Last W aus der Gleichung

$$x = c\left(\text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cotg.}\,\alpha + \frac{b\,Q\ \text{Sin.}\,\varphi}{a\,P\ \text{Sin.}\,\alpha}\right)$$

wenn man l für x und W für Q setzt; nemlich

$$W = \frac{l - c\,(\text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cotg.}\,\alpha)}{b\,c\ \text{Sin.}\,\varphi}\,a\,P\ \text{Sin.}\,\alpha$$

und, wenn $\varphi = \alpha$ ist; also der Nullpunct der Eintheilung in f liegt, so wird

$$W = \frac{a\,l\,P}{b\,c}.$$

Nimmt man nun l so groß, daß $\frac{a\,l\,P}{b\,c}$ eine ganze Zahl wird, so hat man nur nöthig, die ganze Länge l in $\frac{a\,l\,P}{b\,c}$ gleiche Theile, vom Nullpunct aus, abzutheilen, und erhält so eine höchst bequeme Wage.

Anmerk. Der Mechanikus du Mont ist der Erfinder dieser neuen Wage.

Dritter Abschnitt.

Von der Reibung und dem Widerstande, welcher aus der Steifheit der Seile entspringt.

---

§. 72. Erklärung. Wenn ein Körper mit irgend einer seiner Begränzungs-Flächen auf einer horizontalen Ebene liegt, so würde eine nach horizontaler Richtung auf ihn einwirkende Kraft, auch wenn sie noch so klein wäre, den Körper allemal in eine, wenn auch noch so geringe Bewegung versetzen, weil sie nichts weiter zu überwinden haben würde, als die Trägheit oder das Beharrungsvermögen desselben, wenn nicht noch ein Hinderniß, nemlich das Ineinandergreifen der Erhöhungen und Vertiefungen des Körpers und der horizontalen Ebene sich der Bewegung widersetzte, und dies Hinderniß wird die Reibung genannt. Ist die Bewegung, zu welcher der Körper gereizt wird, eine fortgehende, bei beständigem Aufliegen auf der Ebene, so heißt die Reibung, gleitend. Ist sie aber drehend um eine feste Achse, so heißt die Reibung, eine Zapfen-Reibung. Ist sie endlich drehend um eine fortgehende Achse, so heißt die Reibung, eine

Walzenreibung. Ist der Körper in Ruhe, und es ist davon die Rede, ihn erst in Bewegung versetzen zu wollen, so hat man die Reibung der Ruhe; ist er aber schon in Bewegung und es ist von Erhaltung derselben die Rede, so hat man die Reibung während der Bewegung.

Ist ein Seil um einen Cylinder gelegt, welcher um seine Achse gedreht werden kann, und hängt an diesem Seil eine Last Q, welche durch diese Drehung erhoben werden soll, so spannt Q das Seil geradlinigt an, und es muß da, wo es sich auf den Cylinder wickelt, in eine Kreiskrümmung übergehen. Da nun das Seil aber, wegen seiner ursprünglichen Steifheit und wegen der Anspannung durch Q sich diesem Krümmen widersetzt, so muß dasselbe an dieser Stelle ein Knie bilden, wodurch der Hebelsarm von Q in Beziehung auf die Achse des Cylinders größer wird, so daß also diese Steifheit des Seils, wegen des daraus entspringenden größeren Hebelsarm, eine Kraft-Vermehrung erfordert, um das Gleichgewicht der Ruhe oder das während der Bewegung zu erhalten. Hieraus läßt sich entnehmen, was unter dem Widerstand der Steifheit der Seile zu verstehen ist. Ganz eine ähnliche Bewandniß hat es, wenn eine Kette um einen Cylinder liegt, denn hier bildet sich das Knie durch die Reibung zwischen den Kettenschacken.

§. 73. Die Größe der Reibung ist von sehr vielen Umständen abhängig, von der Materie beider Kör-

per, von ihrer Politur, der Adhaesion, dem Normal-Druck, der schlüpfrichen Materie, womit man etwa die Körper bestreicht, der Temperatur, der Größe der Flächen, dem Zustand der Ruhe oder Bewegung, der Größe der Bewegung u. s. w., und es ist nicht wohl denkbar, rein theoretisch für jeden Fall ihre Größe zu bestimmen. Vorzüglichen Einfluß auf ihre Bestimmung heben: der Normal-Druck, die Materie selbst, ihre Rauhigkeit, die Schmiere und der Zustand der Ruhe oder der, der schon statt findenden Bewegung. Da nun den Erfahrungen gemäß der Reibungswiderstand beinahe im directen Verhältniß des Normal-Drucks steht, so bleibt zur Ausmittlung der Größe dieses Widerstandes nichts weiter übrig, als für jede der vorzüglich im Gebrauch vorkommenden Materien, Schmieren und Arten der Reibung, so wie, ob vom Ruhestand, oder einer Bewegung von mittlerer Größe die Rede ist, das Verhält-hältniß des Normal-Drucks zum Reibungswiderstande durch Versuche zu bestimmen. Die genauesten und mannigfaltigsten hat Coulomb angestellt, und die Tabellen §. 75. sind aus seinen Versuchen entnommen.

§. 74. Aufgabe. Für einen bestimmten gegebenen Fall die Größe der Zahl μ zu bestimmen, womit der Normal-Druck multiplicirt werden muß, damit das Product die Größe des Reibungswiderstandes angiebt.

Auflösung. Der Normal-Druck sei = N;

der zugehörige Reibungswiderstand oder die Friction $= F$; bei derselben Materie, derselben Art Reibung, Rauhigkeit, Schmiere u. s. w. sei in einem andern Fall der Normal-Druck $= n$; der Reibungswiderstand $= f$; so verhält sich beinahe

$F : f = N : n$ und also ist

$$F = \frac{f}{n} . N.$$

Ist nun für einen hieher gehörigen Fall durch Versuche $\frac{f}{n} = \mu$ bestimmt, so hat man für alle solche Fälle $F = \mu N.$

§. 75. In folgenden Tafeln sind die Werthe für μ, für verschiedene Körper, sowohl für gleitende als für Zapfen-Reibung, für den Zustand der Ruhe und den einer mittleren Größe der Bewegung angegeben.

I. Tafel.

Gleitende Reibung der Ruhe.

Reibende Körper.	trocken.	geschmiert.
Eichen auf Eichen	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$
Kiefern auf Kiefern	$\frac{7}{12}$	
Ulmen auf Ulmen	$\frac{6}{13}$	
Eichen auf Kiefern	$\frac{2}{5}$	
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	
Kupfer auf Eisen	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{7}$
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{5}$	
Kupfer auf Eichen	$\frac{2}{11}$	
Messing auf Eisen	$\frac{4}{15}$	

II. Tafel.

Zapfen-Reibung der Ruhe.

Reibende Körper.	trocken.	geschmiert.
Stein-Eichen auf Guajac		$\frac{1}{16}$
Kupfer auf Eisen	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{8}$
Eisen auf Guajac	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$

III. Tafel.

Gleitende Reibung der Bewegung.

Reibende Körper.	trocken.	geschmiert.
Eichen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$
Kiefern auf Kiefern	$\frac{1}{6}$	
Ulmen auf Ulmen	$\frac{1}{10}$	
Eichen auf Kiefern	$\frac{3}{19}$	
Eisen auf Eisen	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$
Kupfer auf Eisen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{11}$
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{15}$
Kupfer auf Eichen	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$

IV. Tafel.

Zapfen-Reibung der Bewegung.

Reibende Körper.	trocken.	geschmiert.
Stein-Eichen auf Guajac		$\frac{1}{20}$
Stein-Eichen auf Ulmen		$\frac{1}{24}$
Kupfer auf Eisen	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}$

§. 76. Die Walzenreibung hängt außer den bisher angegebenen Bestimmungs-Größen, auch noch vom Halbmesser r der Walzen ab, und es hat sich aus den Versuchen ergeben, daß ihre Größe im umgekehrten Verhältniß mit r steht. Bezeichnet also N wieder den Normal-Druck, so kann man die Walzenreibung

$$= \mu . \frac{N}{r} \text{ setzen.}$$

Wird N in Pfunden und r in Zollen verstanden, so läßt sich hier im Durchschnitt $\mu = \frac{1}{40}$ annehmen.

§. 77. In der Folge soll durchaus bei gleitender Reibung μ; bei Zapfenreibung μ' und bei Walzenreibung μ'' gebraucht werden.

§. 78. Aufgabe. Ein Körper, dessen Gewicht $= Q$ ist, liegt auf einer horizontalen Ebene, und wird von einer Kraft P unter dem Neigungswinkel β gegen den Horizont, zu einer fortgehenden Bewegung gereizt. Es soll die Größe von P fürs Gleichgewicht mit dem Reibungswiderstand, d. h. es soll bestimmt werden, welche Kraft P diejenige Größe hat, daß sie, wenn man dieselbe durch die geringste Kraft-Zulage vergrößerte, den Körper fortgehend bewegen würde.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Richtung von P durch den Schwerpunct n des Körpers geht und blos von fortgehender Bewegung die Rede ist (*Fig.* 45); so bestimmt nach §. 13. I. Bd. die Durchschnittslinie der Horizontalebene und der Verticalebene durch die Richtung von P diejenige Rich-

tung, nach welcher Q, wenn P die nöthige Größe hat, eine Bewegung anfangen würde. Es entspringt also, wenn die Ebene des Papieres *(Fig. 45)* diese Vertical-Ebene vorstellt, aus P eine horizontale Wirkung nach der Richtung nf, und da nun die Größe des Reibungswiderstandes von dem Normal-Druck abhängt, so muß man also, wenn nk eine Normale auf die Horizontalebene bezeichnet, P in 2 Seitenkräfte v, w nach den Richtungen nf und nk zerlegen. Man erhält

$$V = P \text{ Cos. } \beta$$
$$W = P \text{ Sin. } \beta,$$

und es ist also der Normal-Druck

$$= Q + P \text{ Sin. } \beta.$$

Aus ihm entspringt ein der Bewegung widerstehendes Hinderniß der Reibung

$$= \mu \, (Q + P \text{ Sin. } \beta),$$

und nur, wenn die, in dieselbe Richtungslinie fallende horizontale Wirkung

$$P \text{ Cos. } \beta > \mu \, (Q + P \text{ Sin. } \beta)$$

ist, wird eine Bewegung erfolgen. Es muß daher, wenn diese entstehen soll,

$$P > \frac{\mu \, Q}{\text{Cos. } \beta - \mu \text{ Sin. } \beta} \text{ sein.}$$

Die Aufgabe beantwortet sich also durch die Gleichung

$$P = \frac{\mu \, Q}{\text{Cos. } \beta - \mu \text{ Sin. } \beta}.$$

§. 79. **Aufgabe.** Für die Formel

$$P = \frac{\mu Q}{\text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta}$$

siehe vorigen §. denjenigen Werth für β zu bestimmen, für welchen P ein Kleinstes wird.

Auflösung. Da der Zähler eine beständige Größe ist, so wird der Quotient ein Kleinstes, für den Werth von β, für welchen

$\varphi\beta = \text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta$ ein Max. wird.

Es ist aber

$$\frac{d\,\varphi\,\beta}{d\,\beta} = -\,\text{Sin.}\,\beta - \mu\,\text{Cos.}\,\beta$$

und wird $= 0$, für $\text{tg.}\,\beta = -\,\mu$.

Weil nun aber

$$\frac{d^2\,\varphi\,\beta}{d\,\beta^2} = -\,\text{Cos.}\,\beta + \mu\,\text{Sin.}\,\beta$$

oder, wenn $\text{tg.}\,\beta = -\,\mu$,

$$\frac{d^2\,\varphi\,\beta}{d\,\beta^2} = -\sqrt{1 + \mu^2} \text{ ist,}$$

also einen negativen Werth annimmt, so ist

$$\text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta$$

für $\text{tg.}\,\beta = -\,\mu$ ein Max.; also

$$P = \frac{\mu Q}{\text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta}$$

für diesen Werth von β, aus $\text{tg.}\,\beta = -\,\mu$, ein Min. Die Größe des Minimums, also das kleinstmöglichste P ist daher

$$= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \cdot Q$$

Beispiel. Für $\mu = \frac{1}{5}$ ergiebt sich

$$\beta = -11^\circ 19'$$

und das kleinste nach dieser Richtung wirkende P

$$= 0,196 . Q.$$

§. 80. Aufgabe. Ein prismatischer Körper AB, dessen Gewicht = W ist, und dessen Schwerpunct in seiner Mitte in D (*Fig.* 46) liegt, ist gegen die verticale Wand BC gelehnt, und steht in A auf der horizontalen Ebene AC; in E wirkt lothrecht auf ihn ein Gewicht = Q; man soll den Neigungswinkel z des Körpers gegen die Verticale unter der Bedingung bestimmen, daß die Reibungen in B und A den Körper in seiner Lage im Gleichgewicht erhalten.

Auflösung. Die horizontale Wirkung in B sei = x; die verticale in A = y; also der Reibungswiderstand in B = μ x, in A = μ y; so sollen, wenn es *Fig.* 47 andeutet, die in ihr angezeigten Kräfte ein Gleichgewicht erhalten. Es muß folglich, damit keine horizontal fortgehende Bewegung erfolgt

1stens $x - \mu y = 0$, und damit keine lothrechte statt findet,

2tens $W + Q - y - \mu x = 0$ sein;

und aus beiden Gleichungen entspringt

$$y = \frac{W + Q}{1 + \mu^2},\ x = \frac{\mu (W + Q)}{1 + \mu^2}.$$

Damit nun auch kein Bestreben zu drehender Bewegung statt findet, so muß, wenn man AB = a; AE = b setzt, und die Momente etwa in Beziehung auf A bildet,

3tens $\mu x a \text{Sin.} z + x a \text{Cos.} z - W \frac{1}{2} a \text{Sin.} z$
$- Q b \text{Sin.} z = 0$

sein, und hieraus ergiebt sich, wenn man für x den gefundenen Werth setzt,

$$\text{Cotg.} z = \frac{(\frac{1}{2} a W + b Q)(1 + \mu^2) - \mu^2 a (Q + W)}{\mu a (Q + W)}.$$

Für $b = \frac{1}{2} a$ entspringt hieraus

$$\text{Cotg.} z = \frac{1 - \mu^2}{2 \mu};$$

also wenn $\mu = \frac{1}{3}$ ist,

$$z = 36^\circ 52'.$$

Für $Q = \infty$ wird $\text{Cotg.} z = \frac{b - (a - b)\mu^2}{a \mu}$.

§. 81. Aufgabe. Ein Cylinder vom Halbmesser $= r$ und Gewicht $= W$ liegt horizontal an seinen beiden Enden auf Unterlagen (*Fig.* 48 u. 49), und wird, wie es *Fig.* 49 angezeigt, von den Kräften P und Q in den Entfernungen a und b von seiner Achse unter den Neigungswinkeln δ und γ gegen die Horizontallinie angegriffen; man soll das Moment der entstehenden Zapfen-Reibung in Beziehung auf die Achse des Cylinders bestimmen.

Auflösung. Die lothrechte Wirkung des Cylinders auf seine Unterlagen ist

$$= P \text{Sin.} \delta + W + Q \text{Sin.} \gamma,$$

die horizontale $= P \text{Cos.} \delta + Q \text{Cos.} \gamma$,

und aus beiden entspringt also an einem nöthigenfalls zu bestimmenden Punct der Peripherien ein Mittel-Druck

$$D = \sqrt{(P \text{Sin.} \delta + W + Q \text{Sin.} \gamma)^2 + (P \text{Cos.} \delta + Q \text{Cos.} \gamma)^2}$$

normal auf die Tangenten in den Berührungsstellen; die Größe des Reibungswiderstandes ist also

$$= \mu' D,$$

und die Größe des Moments desselben

$$= r.\ \mu'.\ D.$$

§. 82. Zusatz. Soll also P eine Drehung hervorbringen, so muß

$$Pa > Qb + r\mu' D,$$

und soll Q eine Drehung erzeugen, so muß

$$Qb > Pa + r\mu' D \text{ sein.}$$

Soll durch P blos Drehung nach der Richtung von Q verhindert werden, so muß

$$Pa = Qb - r\mu' D,$$

und soll Q die Bewegung, welche P beabsichtigt, blos aufheben, so muß

$$Qb = Pa - r\mu' D \text{ sein.}$$

Für jede dieser Fragen kann man die zu bestimmende Größe entwickeln, wenn man den Werth von D zuvor substituirt.

§. 83. Aufgabe. Ein Cylinder vom Halbmesser = r, wird von den Kräften P und Q, wie es die *Fig.* 50 anzeigt, in verticaler Lage, schwebend erhalten, so daß die Achse des Cylinders also eine horizontale Lage annimmt. Um den Cylinder ist eine auf ihn bewegliche Hülse gelegt, und von ihr herab, an ihren tiefsten Punct wirkt vertical eine Gewalt W; (das Gewicht der Hülse ist in W mit begriffen). Man soll

1stens die Lage bestimmen, in welcher W wirken wird, wenn P größer ist als es das Gleichgewicht er-

fordert, so daß dem Bestreben von P gemäß eine Drehung erfolgt;

2tens das Moment des aus der Reibung zwischen Hülse und Cylinder entspringenden Widerstandes, in Beziehung auf die Achse des Cylinders, angeben.

Auflösung. Die Größe der Reibung zwischen Hülse und Cylinder ist $= \mu' W$; dieser gemäß, wird, wenn auch der Cylinder sich dreht, die Hülse ihre Stelle auf ihn nicht sogleich verlassen, sondern der Aufhängepunct n von W wird einen Bogen beschreiben, bis zu der Stelle, an welcher W in Beziehung auf die Achse des Cylinders ein Moment erhält, welches dem Moment der Reibung $r . \mu' W$ gleich ist. Es stelle *Fig.* 51 die Lage in diesem Augenblick dar, und x sei die Normale von der Achse des Cylinders auf diejenige Richtung von W, welche sie im letzten Augenblick der Erhebung hat, so hat man

$$W x = r \mu' W; \text{ also}$$

1) $x = \mu' . r.$

Soll nun P eine Drehung hervorbringen, so hat man $$P a > Q b + W x;$$

oder, wenn unter P diejenige Kraft verstanden wird, welche erst dann, wenn man sie um ein Geringes vermehrt, Bewegung hervorbringt, so hat man

$$P a = Q b + r \mu' W.$$

Weil nun, wenn keine Reibung existirte, fürs Gleichgewicht $P a = Q b$ sein müßte, so hat man also

2) das Moment der Reibung $= r \mu' W.$

§. 84. Aufgabe. Ein Cylinder vom Halbmesser $= r$ und Gewicht $= W$ (*Fig.* 52) steht vertical auf einer horizontalen Ebene in einer kreisförmigen, demselben Halbmesser r zugehörigen Vertiefung, und wird von einer horizontal thätigen Kraft zu einer drehenden Bewegung um seine Achse gereizt; man soll das Widerstands-Moment der Reibung auf der Grundfläche in Beziehung auf die Achse des Cylinders angeben.

Auflösung I. Beschreibt man innerhalb der Kreisebene $r^2 \pi$ eine concentrische Peripherie mit dem Halbmesser x, so ist der von dem gesammten Normal-Druck W auf $2 x \pi d x$ kommende Theil

$$= \frac{2 x \pi d x}{r^2 \pi} . W;$$

der zugehörige Reibungswiderstand ist also

$$= \mu . \frac{2 x d x}{r^2} . W;$$

und sein Moment

$$= x . \mu \frac{2 x d x}{r^2} W;$$

folglich das Moment des Reibungswiderstandes auf der ganzen Ebene $x^2 \pi$;

$$= \frac{2 \mu W}{r^2} . \int x^2 . d x$$

$$= \tfrac{2}{3} . \frac{\mu W}{r^2} . x^3;$$

daher für $x = r$ das gesammte Widerstands-Moment

$$= \tfrac{2}{3} r . \mu W.$$

Auflösung II. Man denke sich die Kreisebene $r^2 \pi$ durch eine unendliche Menge Halbmesser in lauter

Elementar-Dreieckchen zerlegt, so liegt in jedem Dreieck der Mittelpunct der gleichgroßen Reibungswiderstände, die sich in jedem Punct von $r^2 \pi$ äußern, auf $\frac{2}{3}$ r (§. 18). Man denke sich daher alle Reibungshindernisse, deren Summe $= \mu W$ ist, in der mit $\frac{2}{3}$ r beschriebenen concentrischen Peripherie, vereint denken, und hat also das verlangte Moment

$$= \frac{2}{3} r . \mu W.$$

§. 85. Aufgabe. Um die Peripherie eines nicht um seine Achse beweglichen, sondern festliegenden Cylinders (*Fig.* 53) ist ein Seil gelegt, so daß seine Endberührungspuncte a, g, am Mittelpunct f den zum Halbmesser = 1 gehörigen Bogen a f g = α bilden; das Seil wird an seinen Enden tangential von den Kräften P und Q angegriffen; wie groß muß P sein, um bei der geringsten Vermehrung ein Fortrutschen des Seils um den Cylinder, dem Bestreben von P gemäß, hervorzubringen?

Auflösung. Betrachtet man den Bogen bc als unendlich klein, so sind die an seinen Endpuncten tangential einander entgegenwirkenden Kräfte, weil die Reibung auf einen als o zu betrachtenden Bogen verschwindet, fürs Gleichgewicht unter einander, als gleichgroß anzunehmen; setzt man daher diese gleichen Kräfte, jede = y; so entspringt aus ihnen der Normal-Druck

$$n = 2y \text{ Sin. } \frac{bc}{2} = 2y \text{ Sin. } \frac{\delta}{2};$$

oder, weil für so einen kleinen Bogen der Sinus desselben ihm selbst gleich ist,

$$n = y\delta.$$

Wird nun der Normal-Druck aus den entgegenstrebenden Seilspannungen auf den Bogen ab = N gesetzt, und bezeichnet φ den zu ab gehörigen Bogen für den Halbmesser = 1; so ist

$$dN = n = y\delta \text{ und}$$
$$d\varphi = \delta; \text{ also}$$
$$dN = y\,d\varphi.$$

Es muß aber für den letzten Augenblick des noch bestehenden Gleichgewichts

$$y = Q + \mu N \text{ sein.}$$

Differenziirt man diese Gleichung, so entsteht daraus

$$dy = \mu\,dN; \text{ oder}$$
$$dy = \mu \cdot y\,d\varphi; \text{ also}$$
$$\frac{dy}{y} = \mu\,d\varphi; \text{ folglich}$$
$$\ln y = \mu\varphi + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird $y = Q$; also

$$\text{Const.} = \ln Q; \text{ daher}$$
$$\ln y = \mu\varphi + \ln Q; \text{ oder}$$
$$\ln\frac{y}{Q} = \mu\varphi.$$

Bezeichnet nun, wie gewöhnlich, e diejenige Zahl 2,7182818 ... für welche $\ln e = 1$ ist, so entsteht aus der letzten Gleichung

$$\frac{y}{Q} = e^{\mu\varphi}; \text{ und hieraus}$$

für $\varphi = \alpha$,

$$P = e^{\mu\alpha} . Q.$$

Ist das Seil n mal um den Cylinder gewickelt, so ist

$$\alpha = n . 2\pi; \text{ also}$$

$$P = e^{2\pi\mu n} . Q.$$

Beispiele. 1) Für $\mu = \frac{1}{3}$ und $n = 0$ entsteht

$$P = Q.$$

2) Für $\mu = \frac{1}{3}$ und $n = \frac{1}{2}$ entsteht

$$P = 2{,}85 . Q.$$

3) Für $\mu = \frac{1}{3}$ und $n = 1$ entsteht

$$P = 8{,}121 . Q.$$

4) Für $\mu = \frac{1}{3}$ und $n = 6$ entsteht

$$P = 286789 . Q$$

u. s. w.; siehe Eytelweins Statik II. Bd. p. 23.

§. 86. Aufgabe. In dem Mantel eines horizontal liegenden Cylinders ist ein Seil befestigt, welches sich in einer Verticalebene befindet, und an welchem eine Last Q hängt. Der Cylinder wird durch irgend eine Kraft zu einer drehenden Bewegung um seine Achse, dem Bestreben von Q entgegengesetzt, gereizt. Man soll das Moment von Q in Beziehung auf die Achse des Cylinders, mit Rücksicht auf die Vergrößerung des Hebelarms durch die Steifigkeit des Seils, bestimmen.

Auflösung. Der Halbmesser des Cylinders (*Fig.* 54) bis in die Mitte des Seils gemessen, sei

$= r$; der Durchmesser des Seils $= \delta$; x bezeichne die Vergrößerung des Hebelarms von Q, durch das Knie, welches der Steifheit des Seils entspricht, entspringend, so daß also

$$r + x \text{ den Hebelsarm von } Q \text{ darstellt;}$$

so kann man schließen, daß x mit der Menge der einzelnen Fäden, welche das Seil bilden, wächst. Die Menge der einzelnen Fäden wächst aber mit dem Querschnitt des Seils oder mit δ^2, und es läßt sich daher schätzen, daß

$$x = k . \delta^2 \text{ zu setzen ist,}$$

wenn k eine durch Versuche zu bestimmende Zahl bezeichnet.

Nach Eytelweins Angaben im 2ten Bande seiner Statik §. 313 bis 320 kann man, Amonton's und Coulombs Versuchen zufolge,

$$k = \frac{1}{3500} \text{ setzen,}$$

wenn δ in Linien und r in Fußen verstanden wird, und man hat also hienach den Hebelsarm von $Q =$

$$r + \frac{1}{3500} . \delta^2 \text{ Fuß.}$$

Versteht man alle Abmessungen, also sowohl r als δ in Zollen, so hat man den erwähnten Hebelsarm

$$= r + 12 . \frac{1}{3500} . (12\,\delta)^2 \text{ Zolle;}$$

oder mit hinreichender Genauigkeit für den Gebrauch

$$= r + \tfrac{1}{2}\,\delta^2 \text{ Zolle.}$$

Beim Gebrauch dieses Ausdrucks müssen also

nothwendig alle Hebelsarme der Gleichung, worinnen er vorkommt, in Zollen ausgedrückt werden.

Das verlangte Moment von Q ist daher

$$= (r + \tfrac{1}{2} \delta^2) . Q.$$

§. 87. Aufgabe. Um einen horizontal liegenden Cylinder ist eine Kette gelegt, und an ihr hängt lothrecht herab ein Gewicht = Q *(Fig. 55)*. Der Cylinder wird durch irgend eine Kraft zu einer drehenden Bewegung um seine Achse, dem Bestreben von Q entgegengesetzt, angereizt. Man soll den Hebelsarm von Q in Beziehung auf die Achse des Cylinders, mit Rücksicht auf seine Vergrößerung, durch die Reibung zwischen den Kettenschacken bestimmen.

Auflösung. Die Schacke ab und die bc bilden, ehe die ab sich auf den Cylinder wickelt, eine gerade Linie, nnd die Reibung in der Peripherie des Querschnitts der Schacke bei b, erhält diese Lage noch einige Zeitlang, wenn auch ab schon auf den Cylinder zum Theil oder ganz aufliegt, bis zu dem Augenblick, in welchem Q. bn oder Q. x dem Moment des Reibungswiderstandes zwischen den Kettenschacken, also wenn man die Dicke der Kettenschacken = d setzt, der Größe

$\mu' . Q . \tfrac{1}{2} d$ gleich wird.

Aus dieser Gleichung entsteht

$$x = \tfrac{1}{2} \mu' d$$

und es läßt sich nun mit hinreichender Genauigkeit für die Ausführung, ohne Rücksicht auf die übrigen

Schacken unterhalb c, der mittlere Hebelsarm von Q gleich r + x; oder

$$= r + \tfrac{1}{2} \mu' d \text{ setzen.}$$

Das Moment von Q ist daher, wenn man $\mu' = \tfrac{2}{7}$ nimmt, gleich

$$Q . (r + \tfrac{1}{7} d).$$

Vierter Abschnitt.

Von den gespannten Seilen.

Des vierten Abschnitts erste Abtheilung.

Von den Rollen und Flaschenzügen.

---

§. 88. Aufgabe. Um einen horizontal liegenden Cylinder, in dessen Mantel eine Vertiefung eingearbeitet ist, welche sich jetzt in einer Verticalebene befindet, ist in dieser Vertiefung ein Seil eingelegt, welches von den Kräften P und Q *(Fig. 56)* angespannt wird. Die Achse dieses Cylinders läuft an beiden Enden in Cylinder von kleinerem Durchmesser (Zapfen) aus, welche in festen Lagern aufliegen, so daß also der Cylinder sich nur um seine Achse drehen kann. Man soll bei dieser Zusammenstellung, welche eine feste Rolle genannt wird, die Größe von P so bestimmen, daß die geringste Vermehrung der so gefundenen Kraft eine Drehung, dem Bestreben von P gemäß, zur Folge haben würde.

Auflösung. Der Durchmesser des Seils sei $= \delta$; das Gewicht des ganzen Seils und der Rolle $= W$; der Halbmesser der Scheibe bis in die Mitte des aufliegenden Seils gemessen $= r$; der Halbmesser

der Zapfen $= \varrho$, alle Längen in Zollen verstanden; nf sei eine Horizontallinie durch die Achse in der Verticalebene, in welcher das Seil sich befindet; α der Neigungswinkel der Richtung von Q; β der, der Richtung von P gegen nf; so ist die Horizontalwirkung auf die Lager der Zapfen

$$= P \operatorname{Cos.} \beta + Q \operatorname{Cos.} \alpha$$

und die Verticalwirkung

$$= P \operatorname{Sin.} \beta + Q \operatorname{Sin.} \alpha + W$$

und hieraus entspringt nach einer mittleren Richtung auf die Lager ein Normal-Druck =

$$\sqrt{(P \operatorname{Cos.} \beta + Q \operatorname{Cos.} \alpha)^2 + (P \operatorname{Sin.} \beta + Q \operatorname{Sin.} \alpha + W)^2};$$

wird dieser = D gesetzt, so hat man in Beziehung auf die Achse der Rolle das Moment des Reibungswiderstandes $= \varrho \mu' D$.

Das Moment von Q, mit Rücksicht auf die Steifheit des Seils, ist

$$= (r + \tfrac{1}{2} \delta^2) Q$$

und das von P ist $= P r$.

Man hat also die Bedingungsleichung

$$P r = (r + \tfrac{1}{2} \delta^2) Q + \varrho \mu' D;$$

oder

$$P r = (r + \tfrac{1}{2} \delta^2) Q$$
$$+ \varrho \mu' . \sqrt{(P \operatorname{Cos.} \beta + Q \operatorname{Cos.} \alpha)^2 + (P \operatorname{Sin.} \beta + Q \operatorname{Sin.} \alpha + W)^2}$$

woraus P entwickelt werden kann.

Anmerk. Eigentlich müßte man bei Bildung der Gleichung auch darauf Rücksicht nehmen, daß das Seil die einmal erhaltene Krümmung beizubehalten strebt, und daß daher

der Hebelsarm von P kleiner wie r ist. Allein diese Abweichung ist so höchst unbedeutend, daß sie sehr wohl außer Betracht gelassen werden kann.

§. 89. Zusatz. Ist $\alpha = \beta = 90°$; so verwandelt sich die Gleichung im vorigen §. in folgende:

$$Pr = (r + \tfrac{1}{2}\delta^2)\,Q + \varrho\mu' . (P + Q + W)$$

und hieraus ist

$$P = \frac{r + \varrho\mu' + \tfrac{1}{2}\delta^2}{r - \varrho\mu'} . Q + \frac{\varrho\mu'}{r - \varrho\mu'} . W$$

oder, wenn man

$\frac{r + \varrho\mu' + \frac{1}{2}\delta^2}{r - \varrho\mu'}$ mit a, und

$\frac{\varrho\mu'}{r - \varrho\mu'}$ mit b bezeichnet,

$$P = aQ + bW.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung und Steifheit wird in jedem Falle $P = Q$.

§. 90. Aufgabe. Eine Rolle liegt vertical auf einem Seil (*Fig.* 57), welches an dem Ende f befestigt ist, und an dem andern g von einer Gewalt P angespannt wird; um die beiden Zapfen der Rolle geht eine Hülse, an welcher lothrecht herab die Last Q hängt, so daß also, wenn P größer ist, als es das Gleichgewicht erfordert, die Rolle nicht blos eine Drehung um ihre Achse, sondern zugleich auch eine fortgehende Bewegung beginnt. Zieht man in der Verticalebene der Kreisscheibe dieser losen Rolle durch die Achse derselben eine Horizontallinie vk, und setzt die Neigungswinkel der Richtungen der Seile gegen diese Linie $= \alpha$; β; die Spannung des Seils bei

f = S; den Halbmesser der Rolle bis in die Mitte des anliegenden Seils gemessen = r; den der Zapfen oder Bolzen = ϱ; den Durchmesser des Seils = δ, alles in Zollen verstanden, das Gewicht des Seils und der Rolle = W; so sollen durch die übrigen, als gegeben, zu betrachtende Größen, die S, β, P, der Bedingung gemäß, bestimmt werden, daß das gefundene P, um ein Weniges vermehrt, eine Bewegung, seinem Bestreben gemäß, hervorbringt.

Auflösung. In Beziehung auf die Linie vk und ihren Durchschnittspunct mit der Achse ergeben sich nach §. 88. I. Bd. mit Anwendung von §. 83. folgende drei Gleichungen:

1) $P \operatorname{Sin.} \beta + S . \operatorname{Sin.} \alpha = Q + W$;

2) $P \operatorname{Cos.} \beta + S \operatorname{Cos.} \alpha = 0$;

3) $Pr = Q . \varrho \mu' + S . (r + \tfrac{1}{2} \delta^2)$;

aus welchen S, β, P allemal entwickelt werden können. Gewöhnlich ist $\alpha = 90^\circ$; und für diesen Fall hat man die Gleichungen

1) $P \operatorname{Sin.} \beta + S = Q + W$;

2) $P \operatorname{Cos.} \beta = 0$;

3) $Pr = Q \varrho \mu' + S (r + \tfrac{1}{2} \delta^2)$.

Aus der 2ten ergiebt sich, weil P nicht = 0 sein kann,

$$\operatorname{Cos.} \beta = 0;$$

also

$$\beta = 90^\circ;$$

und nun aus der Verbindung von 1) und 3),

$$P = \frac{r + \varrho \mu' + \frac{1}{2} \delta^2}{2r + \frac{1}{2} \delta^2} . Q + \frac{r + \frac{1}{2} \delta^2}{2r + \frac{1}{2} \delta^2} . W.$$

$$S = \frac{r - \varrho\mu'}{2r + \frac{1}{2}\delta^2} Q + \frac{r}{2r + \frac{1}{2}\delta^2} \cdot W;$$

oder, $\frac{r + \varrho\mu' + \frac{1}{2}\delta^2}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ mit c,

$\frac{r + \frac{1}{2}\delta^2}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ mit d,

$\frac{r - \varrho\mu'}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ mit e

und $\frac{r}{2r + \frac{1}{2}\delta^2}$ mit f bezeichnet,

$$P = cQ + dW$$
$$S = eQ + fW.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung und Steifheit entsteht aus den allgemeinen 3 Gleichungen

$$\mathrm{Cos.}\,\beta = -\mathrm{Cos.}\,\alpha;\ \text{d. h.}$$

beide Richtungen, die von P und S, müssen gleiche aber entgegengesetzte Neigungen gegen v k haben. Ferner entsteht

$$P = S = \frac{Q + W}{2\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}.$$

§. 91. Aufgabe. Bei einem Rollenzug von n losen Rollen und einer festen (*Fig.* 58) die Gleichung zwischen der Last Q, der Kraft P und den übrigen Bestimmungsgrößen für die Bedingung darzustellen, daß die Kraft P, wenn sie um ein Weniges vermehrt wird, eine Erhebung der Last bewirkt.

Auflösung. Es ist nach §. 90. bei derselben Bezeichnung die Spannung von AB; oder

$$S' = cQ + dW.$$

Eben so die von CD; oder

$$S'' = cS' + dW.$$

Ferner die von EF; oder

$$S''' = c S'' + d W$$

u. s. w.;

oder $S' = c Q + d W$

$$S'' = c^2 Q + c d W + d W$$

$$S''' = c^3 Q + c^2 d W + c d W + d W$$

u. s. w.

Endlich für die nte lose Rolle

$$S^n = c^n Q + (c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots . c + 1)\, d W$$

$$= c^n Q + \frac{1 - c^n}{1 - c} . d W$$

und daher, nach §. 89.

$$P = a S^n + b W; \text{ oder}$$

$$P = a c^n Q + \left(\frac{1 - c^n}{1 - c}\, a d + b\right) W;$$

oder auch

$$\text{I. } P = \left(Q - \frac{d}{1 - c} W\right) a c^n + \left(b + \frac{a d}{1 - c}\right) W$$

Ohne Rücksicht auf Reibung und Steifigkeit ist

$$a = 1; \quad b = 0; \quad c = \tfrac{1}{2}; \; d = \tfrac{1}{2};$$

und es entsteht aus I.

$$P = \frac{Q - W}{2^n} + W.$$

Durch die Entwicklung entspringt ferner aus I.

$$\text{II. } Q = \frac{1}{a c^n} . \left[P - \left(\frac{1 - c^n}{1 - c}\, a d + b\right) W\right]$$

III. $n = \frac{\log. B}{\log. c}$, wenn B die Größe

$\frac{(1 - c)(P - b W) - a d W}{a [(1 - c) Q - d W]}$ bezeichnet.

Bei-

Beispiel. Es sei $n = 4$; $Q = 570$; $W = 10$; $r = 3''$; $\varrho = \frac{1}{2}''$; $\delta = \frac{1}{2}''$; $\mu' = \frac{1}{6}$; so ist $a = \frac{11}{10}$; $b = \frac{1}{35}$; $c = \frac{11}{21}$; $d = \frac{25}{49}$; folglich

$$P = \frac{29}{6} \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^5 + \frac{169}{14} = 58{,}38;$$

oder, wenn man nur Reibung und Steifheit, aber W nicht berücksichtigt,

$$P = ac^n Q = \frac{11}{10} \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^4 \cdot 570 = 47{,}2;$$

oder, wenn man Reibung und Steifheit wegläßt, aber W als Last berücksichtigt,

$$P = \frac{Q - W}{2^n} + W = 45$$

oder endlich, ohne Rücksicht auf W, auf Reibung und Steifigkeit

$$P = \frac{Q}{2^n} = 35{,}625.$$

§. 92. Aufgabe. An einem Flaschenzug (*Fig.* 59) von n Rollen in jeder Flasche die Gleichung zwischen der Kraft P, der Last Q und den übrigen Bestimmungsgrößen fürs Gleichgewicht im Anfang der Bewegung darzustellen (d. h. P so zu bestimmen, daß bei der geringsten Vergrößerung des gefundenen P eine Bewegung, seinem Bestreben gemäß, erfolgt).

Auflösung. Die Wirkungen, welche aus Q auf die Bolzen der unteren beweglichen Flasche entspringen, sollen der Reihefolge nach Q'; Q''; Q''' u. s. w., die Spannungen der die Rollen der oberen und unteren Flasche verbindenden Seile S; S'; S'';

S''' u. s. w. heißen, so hat man bei der bisherigen Bezeichnung, $n = 4$ angenommen,

1) $S = cQ^{IV} + dW$; §. 90.

2) $S' = aS + bW$; §. 89.

3) $S' = eQ''' + fW$; §. 90.

4) $S'' = cQ''' + dW$;

5) $S''' = aS'' + bW$;

6) $S''' = eQ'' + fW$;

7) $S^{IV} = cQ'' + dW$;

8) $S^{V} = aS^{IV} + bW$;

9) $S^{V} = eQ' + fW$;

10) $S^{VI} = cQ' + dW$;

11) $P = aS^{VI} + bW$;

12) $Q = Q' + Q'' + Q''' + Q^{IV}$.

Aus diesen 12 Gleichungen können die 12 unbekannten Größen S; S'; S''; S'''; S^{IV}; S^{V}; S^{VI}; Q'; Q''; Q'''; Q^{IV}; P entwickelt werden. Die Verbindung der ersten 3, wenn man $ad + b = h$ setzt, giebt

I. $eQ''' + f.W = acQ^{IV} + hW$;

die der folgenden 3

II. $eQ'' + fW = acQ''' + hW$.

Eben so entsteht aus 7), 8), 9)

III. $eQ' + fW = acQ'' + hW$;

aus 10) und 11)

IV. $P = acQ' + hW$

und hiezu 12) oder

V. $Q = Q' + Q'' + Q''' + Q^{IV}$.

Aus IV. entspringt nun

$$Q' = \frac{P - hW}{ac};$$

dies in III. gesetzt, und Q'' entwinckelt, liefert

$$Q'' = \frac{e}{ac} \cdot \frac{P - hW}{ac} + \frac{f - h}{ac} W$$

Ferner giebt II., wenn man diesen Werth für Q'' hinein setzt,

$$Q''' = \left(\frac{e}{ac}\right)^2 \cdot \frac{P - hW}{ac} + \left(\frac{e}{ac}\right)^1 \cdot \frac{f - h}{ac} W + \frac{f - h}{ac} W.$$

Endlich folgt eben so aus I.

$$Q^{IV} = \left(\frac{e}{ac}\right)^3 \cdot \frac{P - hW}{ac} + \left(\frac{e}{ac}\right)^2 \cdot \frac{f - h}{ac} W + \left(\frac{e}{ac}\right)^1 \cdot \frac{f - h}{ac} W + \frac{f - h}{ac} W$$

und sind es n Rollen in jeder Flasche, so erleidet der Bolzen der obersten in der unteren Flasche einen Druck =

$$\left(\frac{e}{ac}\right)^{n-1} \cdot \frac{P - hW}{ac} + \left[\left(\frac{e}{ac}\right)^{n-2} + \left(\frac{e}{ac}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{e}{ac}\right)^1 + 1\right] \cdot \frac{f - h}{ac} W.$$

Setzt man die für Q'; Q'' etc. gefundenen Werthe in V.; so entsteht für n Rollen in jeder Flasche

$$Q = \left[1 + \frac{e}{ac} + \left(\frac{e}{ac}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{e}{ac}\right)^{n-1}\right] \cdot \frac{P - hW}{ac}$$
$$+ \left[(n-1) \cdot 1 + (n-2)\frac{e}{ac} + (n-3)\left(\frac{e}{ac}\right)^2 + \ldots + [n-(n-1)]\left(\frac{e}{ac}\right)^{n-2}\right] \cdot \frac{f - h}{ac} W$$

oder $\frac{e}{ac} = t$ gesetzt,

$$Q = \frac{1 - t^n}{1 - t} \cdot \frac{P - hW}{ac} +$$

$$[n (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-2}]$$

$$-[1 + 2t + 3t^2 + \ldots + (n-1)\, t^{n-2}] \cdot \frac{f - h}{ac} W$$

Es ist aber nach pag. 50. I. Bd.

$$1 + 2t + 3t^2 + \ldots + (n-1)\, t^{n-2}$$

$$= \frac{(t-1)\, n t^{n-1} - t^n + 1}{(t-1)^2} = \frac{(nt - n - t)\, t^{n-1} + 1}{(t-1)^2}$$

folglich

$$Q = \frac{1 - t^n}{1 - t} \cdot \frac{P - hW}{ac} + \Big[n \frac{1 - t^{n-1}}{1 - t}$$

$$- \frac{(nt - n - t)\, t^{n-1} + 1}{(1 - t)^2} \Big] \frac{f - h}{ac} W$$

$$= \frac{1 - t^n}{1 - t} \cdot \frac{P - hW}{ac} + \Big[\frac{n}{1 - t} - \frac{1 - t^n}{(1 - t)^2} \Big] \frac{f - h}{ac} W$$

oder

$$\text{I. } Q = \frac{(1 - t^n)[(1 - t)P + (ht - f)W] + n(1 - t)(f - h)W}{(1 - t)^2\, ac}$$

und hieraus

$$\text{II. } P = \frac{ac(1 - t)Q - n(f - h)W}{1 - t^n} - \frac{ht - f}{1 - t} \cdot W.$$

Anmerk. So weitläuftig auch die Herleitung ist, und die Formeln selbst sind, so sind sie doch nicht mathematisch genau zu nennen, denn

1stens sind nur bei den Flaschenzügen, bei welchen die Rollen neben einander liegen, a, b, c, d, e, f bei allen Rollen von einerlei Größe; bei solchen aber, wie die Figur einen darstellt, sind sie verschieden, und die Formeln werden nur näherungsweise brauchbar, wenn man die mittleren Halb-

messer der Rollen und Bolzen, so wie in Beziehung auf W das mittlere Gewicht in Rechnung bringt;

2tens ist W in Beziehung auf das Gewicht des Seils, welches es zugleich mit ausdrückt, für jede Rolle einzeln betrachtet, eine veränderliche Größe, wo also in der Anwendung auch nur eine mittlere Größe genommen werden kann. Der Einfluß ist indessen so gering, daß die Formeln dem ohngeachtet eine hinreichende Genauigkeit geben. Eine ähnliche, obgleich etwas veränderte, Bemerkung findet in Hinsicht der Formeln des vorigen §. statt. Eine Unbequemlichkeit obiger Formeln ist auch die, daß n aus ihnen nicht algebraisch entwickelt, sondern nur durch Versuchen bestimmt werden kann.

§. 93. Zusatz. Läßt man W außer Betracht, so entsteht

$$Q = \frac{1 - t^n}{ac - e} . P$$

$$P = \frac{ac - e}{1 - t^n} . Q$$

$$n = \frac{\log. [P - (ac - e) Q] - \log. P}{\log. t} .$$

Berücksichtigt man W, läßt aber Reibung und Steifheit außer Betrachtung, so entsteht (am leichtesten aus dem ersten noch nicht reducirten Werth für Q)

$$Q = n (2P - W)$$

$$P = \frac{Q}{2n} + \tfrac{1}{2} W$$

$$n = \frac{Q}{2P - W} .$$

Läßt man W, Reibung und Steifheit außer Betracht, so wird

$$Q = 2nP$$

$$P = \frac{Q}{2n}$$

$$n = \frac{Q}{2P}.$$

Die letzten 6 Formeln ergeben sich auch sehr leicht unmittelbar aus dem Cartes. Grundsatz. pag. 156. I. Bd.

Beispiel. Es sei $n = 3$; $Q = 600$; W als Gewicht einer Rolle und dem zugehörigen Antheil der Flasche und des Seils ein Mittel $= 10$; $\delta = \frac{1}{2}''$; $\mu' = \frac{1}{6}$, und ebenfalls als Mittelwerth $r = 3''$; $\varrho = \frac{1}{2}''$. Man soll P bestimmen.

Es ist $a = \frac{11}{10}$; $b = \frac{1}{35}$; $c = \frac{11}{21}$; $d = \frac{25}{49}$; $e = \frac{10}{21}$; $f = \frac{24}{49}$; $h = \frac{289}{490}$; $t = \frac{10^2}{11^2}$; und es ergiebt sich vollständig genau

$$P = 144,8;$$

ohne Rücksicht auf W wird

$$P = 137,8;$$

ohne Rücksicht auf Reibung und Steifheit erhält man

$$P = 105;$$

und ohne Rücksicht auf W, so wie auf Reibung und Steifheit, folgt

$$P = 100.$$

Des vierten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von den Seilmaschinen.

---

§. 94. Erklärung. Wenn an einem oder mehreren mit einander durch Knoten verbundenen Seilen, Kräfte angebracht sind, so heißt diese Verbindung eine Seilmaschine. Es sollen in diesem Abschnitt einige der Fälle untersucht werden, unter welchen Kräfte an einer solchen Seilmaschine einander im Gleichgewicht erhalten, bei der Voraussetzung, daß die Seile vollkommen biegsam, unausdehnbar und ohne Gewicht sind. Auch ist in jeder dieser Aufgaben angenommen, daß die Seile mit den Richtungslinien der thätigen Kräfte alle in einer Ebene liegen.

§. 95. Aufgabe. Auf der Horizontallinie $AB = c$ (*Fig.* 60) stehen in A und B zwei lothrechte Stangen $AC = a$ und $BD = b$. Ein Seil von der Länge l, welche größer wie die gerade Linie CD ist, ist mit seinen beiden Endpuncten in C und D befestigt, und auf dasselbe wird ein Gewicht P so aufgehängt, daß es frei herabgleiten kann. Wenn dasselbe nun den Einwirkungen der Schwere frei überlassen wird, so soll bestimmt werden, bis zu welchem Punct es sich senken wird.

1ste Auflösung. Angenommen, CND stelle die Lage des Seils im Gleichgewicht vor, N sei der tiefste Punct desselben (oberhalb AB gedacht) und NM

$$P = \frac{Q}{2n}$$

$$n = \frac{Q}{2P}$$

Die letzten 6 Formeln [illegible] leicht unmittelbar aus dem C[illegible] I. Bd.

Beispiel. Es sei [illegible] Gewicht einer Rolle [illegible] Flasche und des S[illegible] [illegible]ungen, $\mu' = \frac{1}{6}$, und e[illegible] [illegible]os y dy - Si[illegible] $\varrho = \frac{1}{2}''$. Man [illegible] [illegible]os. z dx

Es ist [illegible] y dy + Cos. y dx

$d = \frac{25}{49}$ [illegible] [illegible]bindung von 2) und 4) entspringt

$t = $ [illegible] $$dz = \frac{\text{Cos. } z\, dx}{x \text{ Sin. } z},$$

[illegible] der von 3) und 4)

ob[illegible] $$dy = -\frac{\text{Cos. } y\, dx}{(1-x)\text{ Sin. } y},$$

Setzt man nun diese Werthe für dz und dy in 1) und dividirt die entstehende Gleichung durch dx, so ergiebt sich

$$\frac{\text{Cos. } z^2}{\text{Sin. } z} + \text{Sin. } z - \frac{\text{Cos. } y^2}{\text{Sin. } y} - \text{Sin. } y = 0;$$

oder

$$\frac{1}{\text{Sin. } z} = \frac{1}{\text{Sin. } y}; \text{ folglich}$$

$$\text{Sin. } z = \text{Sin. } y$$

und hieraus, weil z nicht das Supplement zu y sein kann, $z = y$.

… den widerstehenden Richtungen der in
… ten dieser Kräfte durch Knoten ver-
… erhält man aus A die Spannung

$$\ldots \frac{A\ \text{Sin.}\ \alpha}{\ldots(\beta - \alpha)}$$

… n b

$$\ldots \frac{\ldots\gamma}{\ldots\beta)}.$$

… Gleichgewicht einge-
… röße de… … ssen, so entsteht zur

$$W = \ldots$$ … die Bedingungs-

2te Auflösung. …
Seitenkräfte V und W, …
W nach der Richtung DN verstan…
aus dem Parallelogramm der Kräfte … w.

$$V = \frac{P\ \text{Sin.}\ z}{\text{Sin.}(y+z)}$$ … sich

$$W = \frac{P\ \text{Sin.}\ y}{\text{Sin.}(y+z)}.$$

Nun ist im Augenblick des entstandenen Gleichgewichts V gleich der gegenwirkenden Spannung des Seiltheils NC; W gleich der des übrigen Stücks ND; und da nur dann Gleichgewicht oder hier Ruhe eintreten kann, wenn die einander entgegen wirkenden Seilspannungen gegenseitig gleich sind, sich also aufheben, so hat man also die Bedingungsgleichung

$$\frac{P\ \text{Sin.}\ z}{\text{Sin.}(y+z)} = \frac{P\ \text{Sin.}\ y}{\text{Sin.}(y+z)};$$

und hieraus

der lothrechte Abstand dieses Punctes von AB; so ist nach §. 13. I. Bd. NM ein Minimum. Bei der in der Figur angedeuteten Bezeichnung hat man also die Gleichungen

1) $x \text{ Sin. } z + (l - x) \text{ Sin. } y = c$

2) $w = b - x \text{ Cos. } z$

3) $w = a - (l - x) \text{ Cos. } y$

4) $w = \text{Minimum.}$

Differenziirt man sämmtliche Gleichungen, so entsteht

1) $x \text{ Cos } z\, dz + \text{Sin } z\, dx + (l-x) \text{ Cos } y\, dy - \text{Sin } y\, dx = 0$

2) $dw = x \text{ Sin. } z\, dz - \text{Cos. } z\, dx$

3) $dw = (l - x) \text{ Sin. } y\, dy + \text{Cos. } y\, dx$

4) $dw = 0.$

Aus der Verbindung von 2) und 4) entspringt

$$dz = \frac{\text{Cos. } z\, dx}{x \text{ Sin. } z},$$

und aus der von 3) und 4)

$$dy = - \frac{\text{Cos. } y\, dx}{(l - x) \text{ Sin. } y}.$$

Setzt man nun diese Werthe für dz und dy in 1) und dividirt die entstehende Gleichung durch dx, so ergiebt sich

$$\frac{\text{Cos. } z^2}{\text{Sin. } z} + \text{Sin. } z - \frac{\text{Cos. } y^2}{\text{Sin. } y} - \text{Sin. } y = 0;$$

oder

$$\frac{1}{\text{Sin. } z} = \frac{1}{\text{Sin. } y}; \text{ folglich}$$

$$\text{Sin. } z = \text{Sin. } y$$

und hieraus, weil z nicht das Supplement zu y sein kann, $z = y.$

Setzt man sodann diesen Werth in 1); so entspringt

$$l \text{ Sin. } y = c; \text{ also}$$

$$\text{Sin. } y = \frac{c}{l}.$$

Ferner ergiebt sich auch

$$x = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{l^2 - c^2}}$$

$$l - x = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{l^2 - c^2}}$$

und die Größe des Minimums, oder

$$w = \frac{a + b - \sqrt{l^2 - c^2}}{2}.$$

2te Auflösung. Zerlegt man P in N in zwei Seitenkräfte V und W, V nach der Richtung CN, W nach der Richtung DN verstanden, so ergiebt sich aus dem Parallelogramm der Kräfte

$$V = \frac{P \text{ Sin. } z}{\text{Sin. } (y + z)}$$

$$W = \frac{P \text{ Sin. } y}{\text{Sin. } (y + z)}.$$

Nun ist im Augenblick des entstandenen Gleichgewichts V gleich der gegenwirkenden Spannung des Seiltheils NC; W gleich der des übrigen Stücks ND; und da nur dann Gleichgewicht oder hier Ruhe eintreten kann, wenn die einander entgegen wirkenden Seilspannungen gegenseitig gleich sind, sich also aufheben, so hat man also die Bedingungsgleichung

$$\frac{P \text{ Sin. } z}{\text{Sin. } (y + z)} = \frac{P \text{ Sin. } y}{\text{Sin. } (y + z)};$$

und hieraus

$$\text{Sin. } z = \text{Sin. } y; \text{ folglich}$$
$$z = y \text{ u. s. w.}$$

Aus der Gleichung $l \text{ Sin. } y$ oder $l \text{ Sin. } z = c$ ergiebt sich sehr leicht folgende Construction:

Man beschreibe mit l aus C einen Kreisbogen, bis er die Richtung von DB schneidet, und verbinde den Schneidungspunct mit C durch eine gerade Linie k; eben so beschreibe man aus D mit l einen Kreisbogen, und aus dem Durchschnittspunct desselben mit der Richtung CA ziehe man eine gerade Linie t nach D. Der Punct, wo k und t sich durchschneiden, ist der verlangte Punct N.

§. 96. Aufgabe. Mehrere Seilstücke N′A′; A′B′; B′C′ u. s. w. Y′M′ (*Fig.* 61) sind durch die Knoten in A′; B′; C′ u. s. w. Y′ zu einem Ganzen verbunden, und dieses ganze Seil ist in den Puncten N′; M′ befestigt. In den n Knoten A′; B′; C′ u. s. w. Y′ sind die Gewichte A; B; C u. s. w. Y angehangen. Man soll die Lage des Ganzen fürs Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung. Man ziehe durch N′ eine Horizontale, und durch M′ eine Verticale, bis sich beide in K schneiden, und setze N′K = h; M′K = v; ferner N′A′ = a; A′B′ = b; B′C′ = c u. s. w. Y′M′ = z. Ferner setze man die zu bestimmenden n Winkel, welche die verticalen Richtungslinien der Kräfte mit den linker Hand liegenden Seilstücken bilden, nach der Reihefolge = α; β; γ; δ u. s. w. w; und zerlege jede der Kräfte A; B u. s. w. in 2 Sei-

tenkräfte nach den widerstehenden Richtungen der in den Angriffspuncten dieser Kräfte durch Knoten verbundenen Seile, so erhält man aus A die Spannung in b

$$= \frac{\text{A Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)}$$

und aus B die Spannung in b

$$= \frac{\text{B Sin. } \gamma}{\text{Sin. } (\gamma - \beta)}.$$

Da nun beide, sobald das Gleichgewicht eingetreten ist, einander gleich sein müssen, so entsteht zur Bestimmung der unbekannten Winkel die Bedingungsgleichung

$$1) \quad \frac{\text{A Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)} = \frac{\text{B Sin. } \gamma}{\text{Sin. } (\gamma - \beta)}.$$

Eben so ergeben sich

$$2) \quad \frac{\text{B Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\gamma - \beta)} = \frac{\text{C Sin. } \delta}{\text{Sin. } (\delta - \gamma)} \quad \text{u. s. w.}$$

Außer diesen n — 1 Gleichungen ergeben sich nun noch, nach Lehren der Polygonometrie, folgende zwei:

$$\text{a Sin. } \alpha + \text{b Sin. } \beta + \text{c Sin. } \gamma + \ldots + \text{z Sin. } \varphi = \text{h};$$
$$\text{a Cos. } \alpha + \text{b Cos. } \beta + \text{c Cos. } \gamma + \ldots + \text{z Cos. } \varphi = \text{h};$$

aus welchen n + 1 Gleichungen sich die n Winkel α, β, γ u. s. w. bis w und der n + 1ste φ bestimmen lassen.

§. 97. Zusatz. Nimmt man blos zwei Gewichte A; B *(Fig. 62)*, in den zwei Knoten A′; B′ lothrecht herab wirkend, an, und verlängert die Richtungslinien N′A′; M′B′ bis zu ihren Durchschnittspuncten

G; F mit den Richtungen von B und A; so verhält sich

$A'B' : A'F = \text{Sin.}\,\gamma : \text{Sin.}\,(\gamma - \beta)$ und

$B'G : A'B' = \text{Sin.}\,(\beta - \alpha) : \text{Sin.}\,\alpha$; folglich

$$B'G : A'F = \text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,(\beta - \alpha) : \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,(\gamma - \beta)$$

Aus der Gleichung

$$\frac{A\ \text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,(\beta - \alpha)} = \frac{B\ \text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,(\gamma - \beta)}$$

im vorigen §. folgt aber auch

$$A : B = \text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,(\beta - \alpha) : \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,(\gamma - \beta)$$

und aus der Vergleichung beider Proportionen entspringt

$$A : B = B'G : A'F,$$

auf welches Gesetz sich die Einrichtung einer Wage begründen läßt.

§. 98. Aufgabe. Es sind *Fig.* 61 die Spannungen der letzten Seilstücke A'N' und Y'M' gegeben; also die Gewalten, mit welchen die festen Puncte N'; M' nach den Richtungen der Linien a; z durch die Gewichte A; B u. s. w. gepreßt werden. Es sollen, wenn man diese, oder vielmehr die Gegenwirkungen, welche N' und M' fürs Gleichgewicht nach diesen Richtungen äußern müssen, V und W nennt, die Bedingungen des Gleichgewichts durch Gleichungen dargestellt werden.

Auflösung. Die aus V und W entspringenden verticalen Wirkungen nach oben sind:

$$V\ \text{Cos.}\,\alpha \text{ und } -W\ \text{Cos.}\,\varphi.$$

Soll also keine Bewegung nach verticaler Richtung erfolgen, so hat man die Bedingungsgleichung

1) $V \text{Cos.} \alpha - W \text{Cos.} \varphi = A + B + C +$ etc.

Ferner entspringen aus V und W die einander entgegen strebenden Horizontalwirkungen

$V \text{Sin.} \alpha$ und $W \text{Sin.} \varphi$,

und es ist also die 2te Bedingungsgleichung fürs Gleichgewicht

2) $V \text{Sin.} \alpha = W \text{Sin.} \varphi$.

§. 99. Zusatz. Setzt man $a = b = c$ u. s. w. und auch $A = B = C$ u. s. w. und betrachtet $A + B + C +$ u. s. w. $= Q$ als das Gewicht des ganzen Seils, so hat man nach dem vorigen §.

1) $V \text{Cos.} \alpha - W \text{Cos.} \varphi = Q$;

2) $V \text{Sin.} \alpha = W \text{Sin.} \varphi$;

woraus erhellet, daß W die mittlere Kraft zu V und Q ist; also die Richtungslinien der Tangente zu den Elementen a und z die Verticallinie durch den Schwerpunct des Seils in einem und denselben Punct schneiden müssen.

Setzt man $\varphi = 90°$, so verwandeln sich obige Gleichungen in folgende:

1) $V \text{Cos.} \alpha = Q$;

2) $V \text{Sin.} \alpha = W$;

und aus ihnen ist auch

$W \text{Cotg.} \alpha = Q$.

§. 100. Lehrsatz. Für $\varphi = 90°$ ist $W = V \text{Sin.} \alpha$ eine beständige Größe.

Beweis. Ist das Seil AC (*Fig.* 63) in A

und C befestigt, und hängt frei lothrecht so herab, daß die Tangente des Elements in C horizontal wird, so soll bewiesen werden, daß die vom Gewicht des Seils herrührende horizontale Pressung auf dem Punct C unabhängig von der Länge des Seils ist.

Ist CD vertical, AD horizontal, E ein beliebiger Punct der Curve CA; CE = v; die zugehörige Abscisse CG = x; und die rechtwinklichte Ordinate GE = y; ferner das Gewicht des Seilstücks CE = Q; die Spannung des Seils in E = V; so wird, wenn x um Δx wächst, $y + \Delta y$ aus y; $Q + \Delta Q$ aus Q; $v + \Delta v$ aus v und $V + \Delta V$ aus V werden; und setzt man den Winkel, welchen die Tangente in E mit der Verticale bildet, $= \alpha$; so ist der, den die Tangente in F mit der Verticale bildet, $= \alpha + \Delta\alpha$. Denkt man sich nun das Seil in F abgeschnitten, und den bleibenden Theil FC durch eine Kraft $V + \Delta V$ in F, nach der Richtung der Tangente in F wirkend, angespannt, so bleibt der bestehende Zustand der Ruhe ungestört. Denkt man sich sodann auch den Theil EC weggeschnitten, und dafür in E herabwärts nach der Richtung der Tangente in E eine Kraft = V angebracht, so bleibt derselbe ebenfalls ungestört, und man hat also nun die 3 Kräfte $V + \Delta V$; V und ΔQ im Gleichgewicht in der Lage, wie es *Fig.* 64 besonders darstellt. Das vorhandene Gleichgewicht zwischen diesen 3 Kräften liefert nun die beiden Gleichungen

1) $(V + \Delta V) \operatorname{Cos}(\alpha + \Delta\alpha) + V \operatorname{Cos}(180 - \alpha) = \Delta Q$

2) $(V + \triangle V) \text{Sin.} (\alpha + \triangle \alpha) = V \text{Sin.} (180 - \alpha)$

oder, wenn man die Klammern auflöſt,

1) $V \text{Cos.} \alpha \text{ Cos.} \triangle \alpha + \triangle V \text{Cos.} \alpha \text{ Cos.} \triangle \alpha$
$- V \text{Sin.} \alpha \text{ Sin.} \triangle \alpha - \triangle V \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \triangle \alpha$
$- V \text{Cos.} \alpha = \triangle Q;$

2) $V \text{Sin.} \alpha \text{ Cos.} \triangle \alpha + \triangle V \text{ Sin.} \alpha \text{ Cos.} \triangle \alpha$
$+ V \text{Cos.} \alpha \text{ Sin.} \triangle \alpha + \triangle V \text{Cos.} \alpha \text{ Sin.} \triangle \alpha$
$= V \text{ Sin.} \alpha.$

Setzt man $d\alpha = 0$ für $\triangle \alpha$; so wird $\text{Cos.} \triangle \alpha = 1$; $\text{Sin.} \triangle \alpha = 0 = d\alpha$; und es entſteht

1) $\text{Cos.} \alpha . dV - V \text{Sin.} \alpha \, d\alpha - dV \text{Sin.} \alpha . \, d\alpha = dQ$

2) $dV . \text{Sin.} \alpha + V \text{Cos.} \alpha \, d\alpha + dV . \text{Cos.} \alpha \, d\alpha = 0$

oder

1) $\text{Cos.} \alpha . \frac{dV}{d\alpha} - V \text{Sin.} \alpha - dV \text{Sin.} \alpha = \frac{dQ}{d\alpha}$

2) $\text{Sin.} \alpha . \frac{dV}{d\alpha} + V \text{Cos.} \alpha + dV \text{ Cos.} \alpha = 0$

alſo, weil $dV = 0$ iſt,

1) $\text{Cos.} \alpha . \frac{dV}{d\alpha} - V \text{ Sin.} \alpha = \frac{dQ}{d\alpha}$

2) $\text{Sin.} \alpha . \frac{dV}{d\alpha} + V \text{ Cos.} \alpha = 0.$

Eliminirt man V, ſo entſpringt hieraus

I. $\frac{dV}{d\alpha} = \text{Cos.} \alpha . \frac{dQ}{d\alpha}$

und ſubſtituirt man dieſen Werth für $\frac{dV}{d\alpha}$ in eine der beiden vorigen Gleichungen, ſo entſteht

II. $V + \text{Sin.} \alpha . \frac{dQ}{d\alpha} = 0;$

und, wenn man $\frac{dQ}{d\alpha}$ aus diesen beiden eliminirt, so ergiebt sich

$$V\, d\, \text{Sin.}\, \alpha + \text{Sin.}\, \alpha .\, dV = 0; \text{ oder}$$

$$d\, (V\, \text{Sin.}\, \alpha) = 0;$$

folglich ist V Sin. α eine beständige Größe.

Es ist aber nach dem vorigen §.

$$W = V\, \text{Sin.}\, \alpha;$$

daher also auch W eine beständige Größe.

Es ist also die Gewalt, mit welcher das Seil oder die Kette nach horizontaler Richtung auszuweichen strebt, in allen Puncten derselben gleich groß, und der Spannung im Scheitel C gleich.

Die Curve AC, welche so eine frei hängende Kette oder ein Seil bildet, heißt Kettenlinie.

§. 101. Zusatz. Aus den Gleichungen in den beiden vorigen §. läßt sich nun bald die Natur der Kettenlinie näher erkennen. Es ist nemlich

$$\text{Cos.}\, \alpha = \frac{dx}{dv}; \quad \text{Sin.}\, \alpha = \frac{dy}{dv};$$

also $$\text{Cotg.}\, \alpha = \frac{dx}{dy};$$

und setzt man diesen Werth in W Cotg. α = Q (§. 99), so entsteht $$W\, dx = Q\, dy;$$

also ist $(Q^2 + W^2)\, dx^2 = Q^2\, (dx^2 + dy^2)$.

Es ist aber $dv^2 = dx^2 + dy^2$, und folglich hat man

$$\sqrt{Q^2 + W^2} .\, dx = Q . dv; \text{ folglich}$$

$$x = \int \frac{Q\, dv}{\sqrt{Q^2 + W^2}}.$$

Fer-

Ferner, weil $Q\,dy = W.\,dx$ ist,

$$y = \int \frac{W\,dv}{\sqrt{Q^2 + W^2}}.$$

Angenommen nun, das Seil wäre gleichförmig dicht, und jede Länge-Einheit hätte das Gewicht p; so ist $Q = p.v$, und weil W eine beständige Größe ist, so entspringt also für diese gemeine Kettenlinie

$$x = p \int \frac{v\,dv}{\sqrt{p^2 v^2 + W^2}} = \frac{\sqrt{W^2 + p^2 v^2} - W}{p}$$

und

$$y = W.\int \frac{dv}{\sqrt{p^2 v^2 + W^2}} = \frac{W}{p}\ \ln\ \frac{pv + \sqrt{W^2 + p^2 v^2}}{W}$$

Beispiel. Ein Seil, von welchem jeder laufende Fuß 1 ℔ wiegt, soll an 2 Puncten A, C, deren lothrechter Abstand DC = 10′ und deren horizontaler AD = 16′ beträgt, aufgehangen werden. Wie lang (v) muß das Seil sein, damit sein letztes Element bei C eine horizontale Lage annehme, und wie stark ist dann die Einwirkung W auf C?

Hier ist $x = 10$; $y = 16$; $p = 1$; folglich

1) $$10 = \sqrt{W^2 + v^2} - W$$

2) $$16 = W.\ln \frac{v + 10 + W}{W}$$

und hieraus folgt

$$\frac{320}{(v + 10)(v - 10)} = \ln \frac{v + 10}{v - 10},$$

woraus sich durch Versuche hinreichend genau

$v = 19,6$ ergiebt.

Dann hat man auch $Q = 19,6$;

$W = 14,2$;

und aus $W = Q \text{ tg. } \alpha$

$\alpha = 35^\circ\, 55\tfrac{1}{2}'$;

aus $V \text{ Sin. } \alpha = W$ aber

$V = 24,2$.

Fünfter Abschnitt.

Von der schiefen Ebene, dem Keil und der Schraube.

Des fünften Abschnitts erste Abtheilung.

Von der schiefen Ebene.

---

§. 102. Aufgabe. Es sei fgkh *(Fig 65)* ein rechtwinklichtes Parallelogramm auf einer horizontalen Ebene; gkmn ebenfalls ein rechtwinklichtes Parallelogramm, aber in einer Verticalebene, so daß folglich die Puncte fhmn ein rechtwinklichtes geneigtes Parallelogramm, also eine schiefe Ebene bestimmen. Es befindet sich auf dieser gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigten schiefen Ebene ein von der Schwere angegriffener Punct c; man soll die Richtung bestimmen, nach welcher c, dieser Einwirkung zufolge, sich bewegen würde, wenn kein Widerstand diese Bewegung aufhebt.

Auflösung. Angenommen, in irgend einem Zeitraume t durchlaufe c den Weg cd = a, auf der schiefen Ebene, und setze den Winkel, welchen a mit ci (parallel nf und mh gezogen) bildet, = ; den,

welchen a mit der Verticallinie macht, $= x$; so ist die, diesem Wege cd zugehörige Annäherung des schweren Punctes c an sein Ziel (dem Mittelpunct der Erde) in diesem Zeitraume t, gleich $a \operatorname{Cos.} x$. Es ist aber, wenn man durch d die Horizontalebene rdk legt,

$$ck = a \operatorname{Cos.} x;$$

$$cr = a \operatorname{Cos.} \mathfrak{z} \text{ und also auch}$$

$$ck = cr \operatorname{Sin.} \alpha = a \operatorname{Cos.} \mathfrak{z} \operatorname{Sin.} \alpha;$$

folglich $a \operatorname{Cos.} x$ oder die Annäherung ans Ziel in der Zeit t

$$= a \operatorname{Cos.} \mathfrak{z} \operatorname{Sin.} \alpha.$$

Wenn aber ein Körper durch irgend einen Umstand verhindert wird, sich nach der Richtung zu bewegen, nach welcher eine Kraft auf ihn einwirkt, (dieser Umstand aber, nicht jede Bewegung verhindert) so wird der Körper der Richtung folgen, auf welcher er in demselben Zeitraume sich seinem Ziel am meisten nähert. §. 13. I. Bd.

Es wird also hier der schwere Punct c auf der schiefen Ebene nach derjenigen Richtung sich bewegen, für welche

$$a \operatorname{Cos.} \mathfrak{z} \operatorname{Sin.} \alpha$$

ein Größtes ist.

Da nun aber hier a und α unveränderliche Größen sind, indem a den Weg in der unbestimmten Zeit t ausdrückt, und α die bestimmte Neigung der schiefen Ebene bezeichnet, so wird also

$$a \operatorname{Cos.} \mathfrak{z} \operatorname{Sin.} \alpha$$

ein Größtes werden, wenn Cos. δ am größten ist. Dies ist aber der Fall für $\delta = 0$.

Es wird sich daher der schwere Punct c nach der Richtung cr, also nach derjenigen Richtung auf der schiefen Ebene bewegen, welche mit der horizontalen Linie auf derselben einen rechten Winkel bildet.

Die Größe des Bestrebens zur Bewegung nach der gefundenen Richtung cr wird das abgleitende Bestreben des Körpers auf der schiefen Ebene genannt.

§. 103. Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene (*Fig.* 65) liegt in irgend einem Punct c derselben ein schwerer Punct, dessen Gewicht = Q ist; man soll die aus dem Gewicht Q entspringenden Wirkungen bestimmen.

Auflösung. Aus Q entspringt 1stens, dem vorigen §. zufolge, ein abgleitendes Bestreben nach der Richtung cr; 2tens ein Reibungswiderstand = μ mal dem Normaldruck von Q auf die schiefe Ebene. Es muß also Q durchs Parallelogramm der Kräfte in 2 Seitenkräfte, die eine nach der Richtung ci, die 2te normal auf die schiefe Ebene zerlegt werden.

Es ergiebt sich leicht: erstere oder das Bestreben, abzugleiten,

$$= Q \text{ Sin. } \alpha;$$

letztere: oder der Normaldruck auf die schiefe Ebene,

$$= Q \text{ Cos. } \alpha,$$

und der daraus entspringende, dem Bestreben Q Sin. α entgegengesetzt wirkende Reibungswiderstand

$$= \mu \, Q \, \text{Cos.} \, \alpha.$$

§. 104. Zusatz. Ist also Sin. $\alpha > \mu$ Cos. α, so erfolgt ein wirkliches Abgleiten nach ci, der Thätigkeit

$$Q \, (\text{Sin.} \, \alpha - \mu \, \text{Cos.} \, \alpha) \text{ entsprechend.}$$

Ist aber Sin. $\alpha < \mu$ Cos. α, so erfolgt kein Abgleiten, sondern Q bleibt in c.

Ist die schiefe Ebene fhmn um fh beweglich, und man erzeugt durch allmähliges Erheben den Winkel α', bei welchem, wenn man ihn noch um ein Minimum vergrößert, ein Abgleiten erfolgen würde, so ist in diesem letzten Augenblick der Ruhe von Q,

$$\text{Sin.} \, \alpha' = \mu \, \text{Cos.} \, \alpha';$$

folglich $\mu = \text{tg.} \, \alpha'$;

oder, wenn die Figur diesen Augenblick vorstellen soll,

$$\mu = \frac{ng}{gf}.$$

Auf diese Weise lassen sich die Werthe für μ, wenn von Reibung der Ruhe die Rede ist, leicht ausmitteln.

§. 105. Aufgabe. Es sei AB (*Fig.* 66) die Durchschnittslinie einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene und einer Verticalebene durch die in §. 103 bestimmte Richtungslinie des abgleitenden Bestrebens gelegt; AC horizontal; BC vertical. Auf der schiefen Ebene liege ein Körper vom Gewicht Q, und man denke sich die erwähnte Verticalebene so gewählt, daß der Schwerpunct N von Q in sie falle.

Wenn nun in einem Punct E des Körpers, der in derselben Verticalebene liegt, eine Kraft so angreift, daß ihre Richtungslinie auch in diese Verticalebene fällt, und es bildet dieselbe mit AB den Winkel β, so soll bestimmt werden:

1stens, wie groß muß diese Kraft sein, um bei der geringsten Vergrößerung den Körper Q umzuwerfen, ohne Rücksicht auf eine mögliche fortgehende Bewegung. Diese Kraft soll P' heißen.

2tens, wie groß muß diese Kraft sein, um bei der geringsten Vergrößerung den Körper Q fortgehend nach der Richtung AB, also seinem abgleitenden Bestreben entgegengesetzt, zu bewegen, ohne Rücksicht auf eine mögliche umwerfende Bewegung. Diese Kraft soll P'' heißen.

3tens, wie groß muß diese Kraft sein, um den Körper Q so eben am Abgleiten zu verhindern. Diese Kraft soll P''' heißen.

Auflösung ad I. Diejenige gerade Linie, um welche, der Form der Berührungsebene des Körpers Q und der schiefen Ebene gemäß, sich Q, im Fall eine Umwerfung erfolgte, drehen würde, also die Drehachse, schneide AB in D, und die Normale DF von D auf die Richtung der Kraft sei $= n$. Ferner werde AB von der Verticallinie aus N herab in G durchschnitten, und DG sei $= e$, so ist in Beziehung auf die erwähnte Drehachse der Hebelsarm von Q

$$= e \text{ Cos. } \alpha,$$

und der von P' ist $= n$.

Man hat also die Gleichung

$$P'. n = Q. e \text{ Cos. } \alpha, \text{ und hieraus}$$

$$P' = \frac{Q e \text{ Cos. } \alpha}{n}.$$

Es wird also eine Kraft, welche größer wie $\frac{Q e \text{ Cos. } \alpha}{n}$ ist, den Körper umwerfen.

Auflösung ad II. Aus den Kräften P'' und Q entsteht eine Normalpressung des Körpers auf die schiefe Ebene, $= Q \text{ Cos. } \alpha + P'' \text{ Sin. } \beta$, und diese wird durch die Gegenwirkung der festen schiefen Ebene aufgehoben. Es entspringt aber aus ihr ein sowohl der Bewegung nach AB als nach BA widerstehendes Reibungshinderniß

$$= \mu (Q \text{ Cos. } \alpha + P'' \text{ Sin. } \beta).$$

Da nun, außer diesem Hinderniß, die nach der Richtung des abgleitenden Bestrebens einander entgegen wirkenden Kräfte $= Q \text{ Sin. } \alpha$ und $P'' \text{ Cos. } \beta$ sind, so wird nur dann P'' eine fortgehende Bewegung nach AB hervorbringen, wenn

$$P'' \text{ Cos. } \beta > Q \text{ Sin. } \alpha + \mu (Q \text{ Cos. } \alpha + P'' \text{ Sin. } \beta) \text{ ist.}$$

Die verlangte Größe der Kraft ergiebt sich also aus der Gleichung

$$P'' \text{ Cos. } \beta = Q \text{ Sin. } \alpha + \mu (Q \text{ Cos. } \alpha + P'' \text{ Sin. } \beta)$$

nemlich

$$P'' = \frac{\text{Sin. } \alpha + \mu \text{ Cos. } \alpha}{\text{Cos. } \beta + \mu \text{ Sin. } \beta} Q.$$

Fände gar keine Reibung statt, so wäre hieraus

$$P'' = \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \beta} . Q.$$

Auflösung zu III. In diesem Fall ergiebt sich, da die Reibung dem Abgleiten widersteht, ganz wie in der Auflösung zu II., die Bedingungsgleichung $P''' \text{Cos.} \beta = Q \text{Sin.} \alpha - \mu (Q \text{Cos.} \alpha + P''' \text{Sin.} \beta)$ und aus ihr

$$P''' = \frac{\text{Sin.} \alpha - \mu \text{Cos.} \alpha}{\text{Cos.} \beta + \mu \text{Sin.} \beta} Q$$

und, wenn gar keine Reibung existirte,

$$P''' = \frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Cos.} \beta} Q \text{ wie in II.}$$

Anmerk. Es ließe sich noch eine 4te Frage aufstellen, nemlich die Bestimmung derjenigen Größe der Kraft, welche so eben hinreichend sein würde, ein vielleicht mögliches drehendes Umfallen des Körpers nach unten zu verhindern. Die Beantwortung würde übrigens ganz wie in I. erfolgen.

Beispiel. 1) Der Körper sei ein Cubus, der so auf der schiefen Ebene aufliegt, daß 2 seiner Kanten dieselbe nach der Richtung des abgleitenden Bestrebens berühren; der Angriffspunct der Kraft sei in der am höchsten liegenden Kante (*Fig.* 67); ferner sei $Q = 100$; die Seite des Cubus $= 4$; $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$; so hat man $n = 4 \text{ Cos. } 45$

$$= 4\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2\sqrt{2} = 2,828 \text{ und}$$

$$ND : DG = \text{Sin. } DGN : \text{Sin. } DNG \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} : e = \text{Sin. } 60 : \text{Sin. } 75; \text{ also}$$

$$e = \frac{2\sqrt{2}. \text{Sin. } (45 + 30)}{\text{Cos. } 30} = 2\sqrt{2}\,(1 + \text{tg. } 30)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 2 + 2 \text{ tg. } 30 = 2 + 2.\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 3,155;$$

$$\text{daher } P' = 100. \frac{(2 + 2\sqrt{\tfrac{1}{3}})\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}{2,828} = \frac{100\,(1 + \sqrt{3})}{2,828}$$

$$= 96,6.$$

Ferner, wenn $\mu = \frac{1}{3}$ angenommen wird,

$$P'' = \frac{\text{Sin. } 30 + \frac{1}{3} \text{ Cos. } 30}{\text{Cos. } 45 - \frac{1}{3} \text{ Sin. } 45.} . 100$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} . 100$$

$$= (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) . 25$$

$$= 167,3$$

und, wenn keine Reibung existirte,

$$P'' = \frac{\text{Sin. } 30}{\text{Cos. } 45} . 100 = 70,7.$$

Endlich, ebenfalls $\mu = \frac{1}{3}$ gesetzt,

$$P''' = \frac{\text{Sin. } 30 - \frac{1}{3} \text{ Cos. } 30}{\text{Cos. } 45 + \frac{1}{3} \text{ Sin. } 45} . 100$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} . 100 = 22,42.$$

Zur Erhaltung, damit kein Umfallen von Q nach unten erfolgt, ist hier gar keine Kraft erforderlich, (oder vielmehr eine negative) indem DG < 4 nemlich DG = e = 3,155 ist, so daß also der Schwerpunct des Körpers unterstützt ist.

Beispiel. 2) Der Fall sei derselbe, wie im vorigen Beispiel, nur mit dem Unterschiede, daß β nicht gegeben ist, sondern für die Bedingung bestimmt werden soll, daß $P' = P''$ wird. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei $= \alpha$; die Seite des Cubus $= a$.

Es ist $\quad n = a \text{ Cos. } \beta$;

ferner $\quad ND : DG = \text{Cos. } \alpha : \text{Sin. } (45 + a)$

und weil $\quad ND = a \text{ Cos. } 45°$ ist,

$$DG = e = \frac{a \text{ Cos. } 45 \text{ Sin. } (45 + \alpha)}{\text{Cos. } \alpha}$$

$$= \frac{a \cdot \frac{1}{2} (\text{Sin. } \alpha + \text{Cos. } \alpha)}{\text{Cos. } \alpha}$$; folglich

$$P' = \frac{\text{Sin. } \alpha + \text{Cos. } \alpha}{2 \text{ Cos. } \beta} Q.$$

Da nun, $\mu = \frac{1}{3}$ gesetzt,

$$P'' = \frac{\text{Sin. } \alpha + \frac{1}{3} \text{Cos. } \alpha}{\text{Cos. } \beta - \frac{1}{3} \text{Sin. } \beta} Q$$ ist,

so entsteht also die Bedingungsgleichung

$$\frac{\text{Sin. } \alpha + \text{Cos. } \alpha}{2 \text{ Cos. } \beta} = \frac{3 \text{ Sin. } \alpha + \text{Cos. } \alpha}{3 \text{ Cos. } \beta - \text{Sin. } \beta}$$

und hieraus

$$\text{tg. } \beta = \frac{\text{Cos. } \alpha - 3 \text{ Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha + \text{Sin. } \alpha}$$; oder

$$\text{tg. } \beta = \frac{1 - 3 \text{ tg. } \alpha}{1 + \text{tg. } \alpha}.$$

§. 106. Zusatz. Ist $\beta = 0$, d. h. läuft die Richtungslinie der Kraft parallel mit der des abgleitenden Bestrebens, so entsteht

$$P'' = (\text{Sin. } \alpha + \mu \text{ Cos. } \alpha) Q;$$ oder: die Länge der schiefen Ebene, also $AB = a$; ihre verticale Projection, also die Höhe $BC = h$; und ihre horizontale Projection, also $AC = b$ gesetzt,

$$P'' = \frac{h + \mu b}{a} Q$$

und

$$P''' = \frac{h - \mu b}{a} Q.$$

Für $\mu = 0$ entspringt hieraus

$$P'' \text{ oder } P''' = \frac{h}{a} Q;$$ also

$$P'' : Q = h : a,$$

welches dem Cartesischen Gesetz: es verhält sich Kraft

zu Last umgekehrt, wie ihre Wege in gleichen Zeiten, entspricht.

§. 107. Zusatz. Ist $\beta = \alpha$, d. h. läuft die Richtungslinie der Kraft parallel mit b, so ist

$$P'' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + \mu\,\text{Cos.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\alpha - \mu\,\text{Sin.}\,\alpha} \cdot Q; \text{ oder}$$

$$P'' = \frac{h + \mu b}{b - \mu h} Q \text{ und}$$

$$P''' = \frac{h - \mu b}{b + \mu h} Q,$$

woraus, für $\mu = 0$,

$$P'' \text{ oder } P''' = \frac{h}{b} Q, \text{ also}$$

$$P'' : Q = h : b \text{ entspringt.}$$

§. 108. Aufgabe. Für welchen Werth von β wird P'' ein Minimum?

Auflösung. Es ist

$$P'' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + \mu\,\text{Cos.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta} Q,$$

und dieser Ausdruck wird, weil der Zähler constant ist, ein Minimum, wenn der Nenner ein Max. wird. Man hat also $\text{Cos.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,\beta = \text{Max.}$; oder, wenn man den Complements-Winkel zu β, d. h. den, welchen die Richtungslinie von P mit der Verticale auf die schiefe Ebene bildet, $= \varphi$ setzt,

$$R = \text{Sin.}\,\varphi - \mu\,\text{Cos.}\,\varphi = \text{Max.}$$

Hieraus folgt

$$\frac{dR}{d\varphi} = \text{Cos.}\,\varphi + \mu\,\text{Sin.}\,\varphi \text{ und}$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\text{Sin.}\,\varphi + \mu\,\text{Cos.}\,\varphi.$$

Aus $\text{Cos.}\,\varphi + \mu\,\text{Sin.}\,\varphi = 0$ ergiebt sich aber

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$ und, weil φ ein

stumpfer Winkel sein muß, wenn

$$\text{Cos.}\,\varphi + \mu\,\text{Sin.}\,\varphi = 0$$ werden soll,

$$\text{Cos.}\,\varphi = -\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

folglich wenn $\mu = \frac{1}{3}$ gesetzt wird,

$$\varphi = 108^\circ 26'.$$

Für diesen Werh von φ wird

$$\frac{d^2 R}{d\,\varphi^2} = -\sqrt{1+\mu^2};$$

folglich ist R für dieses $\varphi = 108^\circ 26$ ein Max., also P'' ein Min. Es ergiebt sich dies

$$P'' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + \mu\,\text{Cos.}\,\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}\,Q;$$ oder

$$P'' = \frac{h + \mu b}{a\sqrt{1+\mu^2}}\,.\,Q$$

Beispiel. Es sei $Q = 130$; $h = 5$; $b = 12$; also $a = 13$; $\mu = \frac{1}{3}$; so entsteht

für $\beta = \alpha$; $P'' = \dfrac{5 + \frac{1}{3}.\,12}{12 - \frac{1}{3}.\,5}\,.\,130 = 113\frac{1}{4}$;

für $\beta = 0$; $P'' = \dfrac{5 + \frac{1}{3}.\,12}{13}\,.\,130 = 90$; und

für $\varphi = 108^\circ 26'$ also $\beta = -18^\circ 26'$

$$P'' = \frac{5 + \frac{1}{3}.\,12}{13.\sqrt{1+\frac{1}{9}}}\,.\,130 = 85\tfrac{5}{8}$$

§. 109. Aufgabe. Ein prismatischer, horizontal liegender Körper (etwa eine Brückenklappe) dessen verticaler Querschnitt durch AB in *Fig.* 68 dargestellt ist, hat seinen Schwerpunct in der Mitte von AB in

N; sein Gewicht sei $= Q$; um A ist er zu drehen und lothrecht über A in C, so daß $AC = AB = a$ ist, ist eine Rolle, über welche ein Seil BCE von der Länge b liegt, an welchem in E ein Gewicht $= P$ hängt, welches mit Q in der eben erwähnten Lage im Gleichgewicht steht, so daß bei der geringsten Vermehrung von P (jedoch ohne Rücksicht auf Reibung und Steifheit des Seils) eine Erhebung der Klappe AB erfolgt. Man soll eine Curve EM angeben, von der Eigenschaft, daß wenn auf ihr bei Erhebung der Klappe das Gewicht P herabgleitet, an jeder Stelle, wo P sich auf ihr befinden mag, das oben erwähnte Gleichgewicht bestehe.

Auflösung. Es sei $CE = c$; also

$$BC = a\sqrt{2} = b - c;$$

und P befinde sich in D, wenn die Klappe um den Winkel α erhoben ist. Der Neigungswinkel des Elements der Curve in D gegen den Horizont sei $= \beta$; der, der Linie $CD = z$ gegen dieses Element $= \zeta$; die Abscisse zu D auf der Verticale CA von E aus sei $= x$; die zugehörige rechtwinklichte Ordinate $= y$; so ist, wenn P sich im Anfangspunct E befindet,

$$P.\,AF = Q.\,AN \text{ oder}$$

$$P.\,a.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} = Q.\,\tfrac{1}{2}\,a; \text{ also}$$

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Befindet sich aber P in D, so ist sein abgleitendes Bestreben auf der elementar-schiefen Ebene in D $= P \text{ Sin. } \beta$,

und es muß die, aus dem Gewicht der Brückenklappe in der dem Winkel α entsprechenden Lage, entspringende Spannung S des Seils nach DC oder CB' hin, dieser Kraft P Sin. β das Gleichgewicht halten, d. h. es muß

$$S \text{ Cos. } \varrho = P \text{ Sin. } \beta \text{ sein.}$$

Es ist aber $S . AG = Q . AN' \text{ Cos. } \alpha$;

oder $S \, a \text{ Sin. } (45 + \frac{\alpha}{2}) = Q . \frac{1}{2} a \text{ Cos. } \alpha$;

folglich

$$\frac{\text{Cos. } \varrho}{\text{Sin. } (45 + \frac{\alpha}{2})} = \frac{P}{Q} . \frac{2 \text{ Sin. } \beta}{\text{Cos. } \alpha} .$$

Setzt man hierin den oben gefundenen Werth für $\frac{P}{Q}$, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$\text{I. } \quad \text{Cos. } \alpha \text{ Cos. } \varrho = \text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (45 + \tfrac{1}{2} \alpha) . \sqrt{2}$$

Es ist aber

$$z \text{ Cos. } \varrho = y \text{ Cos. } \beta + (x + c) \text{ Sin. } \beta; \text{ also}$$

$$\frac{z \text{ Cos. } \varrho}{\text{Sin. } \beta} = y \text{ Cotg. } \beta + x + c,$$

und weil $\text{Cotg. } \beta = \frac{dy}{dx}$ ist, so entsteht

$$\frac{z \text{ Cos. } \varrho}{\text{Sin. } \beta} = y \frac{dy}{dx} + x + c.$$

Es ist aber $z^2 = y^2 + (x + c)^2$; also

$$\frac{z\,dz}{dx} = y \frac{dy}{dx} + x + c; \text{ folglich}$$

$$\frac{\text{Cos. } \varrho}{\text{Sin. } \beta} = \frac{dz}{dx} \text{ und}$$

$$\text{Cos. } \varrho = \frac{dz}{dx} \text{ Sin. } \beta.$$

Substituirt man diesen Werth in I., so entsteht

$$\text{II.} \quad \text{Cos.}\,\alpha.\ \frac{dz}{dx} = \text{Sin.}\,(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)\,\sqrt{2}.$$

Es ist aber auch

$$z = b - B'C$$
$$= b - 2a\,\text{Cos.}\,(45 + \tfrac{1}{2}\alpha);\ \text{folglich}$$
$$dz = a\,\text{Sin.}\,(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)\,d\alpha,$$

und diesen Werth in II. gesetzt, giebt

$$a\,\text{Cos.}\,\alpha\,d\alpha = \sqrt{2}.\,dx,$$

und das Integral hievon ist

$$a\,\text{Sin.}\,\alpha = x.\,\sqrt{2};\ \text{also hat man}$$
$$\text{III.} \quad x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\ \text{Sin.}\,\alpha;\ \text{oder}$$
$$AF = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = e\ \text{gesetzt},$$
$$\text{IV.} \quad x = e.\ \text{Sin.}\,\alpha.$$

Aus den beiden Werthen

$$x = e\,\text{Sin.}\,\alpha\ \text{und}$$
$$z = b - B'C$$

läßt sich die Curve sehr leicht construiren.

Die größte Abscisse derselben ist $= e\,\text{Sin.}\,90^\circ$ $= e$ oder $= AF$; und dann ist $z = b$.

Will man eine Gleichung zwischen y und x, so hat man

$$z = b - 2a\,\text{Cos.}\,(45 + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= b - 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$= b - 2a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\,\sqrt{1 - \text{Sin.}\,\alpha};$$

oder aus IV. $\frac{x}{e}$ für Sin. α, und e für $a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ gesetzt,

$$z = b - 2e.\,\sqrt{1 - \frac{x}{e}}$$
$$= b - 2.\,\sqrt{e^2 - ex};$$

also

also $y^2 = z^2 - (x + c)^2$ oder

$$\text{V.}\quad y^2 = (b - 2\sqrt{e^2 - ex})^2 - (x + c)^2,$$

worinnen $e = a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \dfrac{b - c}{2}$ ist.

Die größte Ordinate wird

$$= b^2 - (c + e)^2$$

$$= \frac{(3b + c)(b - c)}{4}.$$

Anmerk. Belidor nannte diese Curve Sinusoide.

Des fünften Abschnitts zweite Abtheilung.

Vom Keil.

§. 110. Aufgabe. Es sei ABC (*Fig.* 69) der mit den Grundflächen parallel genommen, hier in verticaler Lage zu denkende Durchschnitt eines senkrechten dreiseitigen Prismens; AB = 2h sei horizontal; AC = BC sei = a und die Verticallinie NC sei = b. Rechts und links dieses Prismens liegt in gleicher Höhe ein Körper DEFG und HJKL, von welchen jeder nach Richtungen, welche auf BC und AC normal sind, mit der Gewalt Q dem lothrechten Niedersinken des Prismens widersteht. Das Gewicht des Prismens, incl. der Gewalt, welche lothrecht, also auf AB normal wirkend, die Senkung des Prismens hervorbringen will, sei = 2P; der Winkel

ACB = 2α. Man soll eine Gleichung zwischen diesen Größen für die Bedingung darstellen, daß die aus ihr zu entwickelnde Kraft 2P, wenn sie um die geringste Größe vermehrt wird, ein lothrechtes Herabsinken des Prismens hervorbringt.

Auflösung. Angenommen, es erzeuge 2P eine Senkung NN' = v, so daß das ganze System sich nun in der Lage befinde, wie es die mit einem Strich versehenen Buchstaben andeuten, so würde Q in den Zeitpunct, in welchen 2P den Weg v durchläuft, den DD' = HH' = v Sin. α, und die nach den Richtungslinien CB, CA widerstrebenden zwei Reibungshindernisse μQ den DB — D'B' = v Cos. α durchlaufen, und beide Wege v Sin. α und v Cos. α würden dem Bestreben der zugehörigen Kräfte Q und μQ entgegengesetzt sein. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist also

$$2Pv - 2Qv\,\mathrm{Sin.}\,\alpha - 2\mu Qv\,\mathrm{Cos.}\,\alpha = 0$$

und hieraus folgt

$$2P = 2Q\,(\mathrm{Sin.}\,\alpha + \mu\,\mathrm{Cos.}\,\alpha)$$

oder

$$P = \frac{h + \mu b}{a}\,Q.$$

Man nennt so ein Prismen einen Keil; AB = 2h seinen Rücken; AC = BC = a seine Seite und NC = b seine Höhe.

Für $\mu = 0$ entsteht P = Q Sin. α oder

$$P = \frac{h}{a}\,Q;\ \text{oder}$$

$$P : Q = h : a.$$

Beispiel. Es entspringe Q aus dem Reibungswiderstand der Körper DEFG, HJKL auf den in der Figur angezeigten schiefen Ebenen, indem vorausgesetzt wird, daß der Neigungswinkel dieser schiefen Ebenen gegen den Horizont (welcher $= \alpha$ ist) nur so groß ist, daß der Reibungswiderstand größer ist als das Bestreben, längs WG abzugleiten. Wird nun das Gewicht jedes solchen Körpers $= R$ gesetzt, so ist die Normalpressung auf $WG = (R + P) \text{Cos.} \alpha$; folglich der Reibungswiderstand $= \mu (R + P) \text{Cos.} \alpha$; und da nun das Bestreben, abzugleiten, $= R \text{ Sin.} \alpha$ ist, so hat man also $Q = \mu (R + P) \text{Cos.} \alpha - R \text{Sin.} \alpha$; folglich

$$P = \frac{h + \mu b}{a} \cdot [\mu (R + P) \text{Cos.} \alpha - R \text{Sin.} \alpha]$$

oder $\frac{b}{a}$ für Cos. α und $\frac{h}{a}$ für Sin. α gesetzt, und P entwickelt, so entsteht

$$P = \frac{(\mu b + h)(\mu b - h)}{a^2 - \mu b (\mu b + h)} \cdot R.$$

Ist $R = 100$; $h = 11$; $b = 60$; $\mu = \frac{1}{3}$; so erhält man

$$P = \frac{31 \cdot 9 \cdot 100}{3721 - 20 \cdot 31} \text{ beinahe } = 9.$$

§. 111. Aufgabe. Es sei alles wie im vorigen §., nur mit der Verschiedenheit, daß die Widerstände Q, Q horizontal, also normal auf b wirken *(Fig. 70)*.

1ste Auflösung. Aus Q entspringt auf die Seite ein Normal-Druck $= Q \text{ Cos.} \alpha$ und aus ihm ein Reibungshinderniß $= \mu Q \text{ Cos.} \alpha$; durchliefe nun

2P den Weg NN′ = v; so würde Q um den DD′ = v tg. α zurückgedrängt werden, und der Weg, welchen die Reibungspuncte, ihres Widerstandes ohnerachtet, zurücklegen müßten, wäre

$$= DB - D'B' = v \,\text{Sec.}\, \alpha;$$

es entsteht daher die Bedingungsgleichung

$$2Pv - 2Qv \,\text{tg.}\, \alpha - 2\mu Q \,\text{Cos.}\, \alpha \, v \,\text{Sec.}\, \alpha = 0$$

und hieraus folgt

$$P = Q(\text{tg.}\, \alpha + \mu) \text{ oder}$$

$$P = \frac{h + \mu b}{b} \cdot Q.$$

2te Auflösung. Bringt man (*Fig.* 71) anstatt Q die Seitenkräfte, normal auf CB, die Q Cos. α und nach der Richtung BC die Q Sin. α in Rechnung, so ist der dem Weg v der Kraft 2P zugehörige Weg von Q Cos. α = MT = v Sin. α, der von der Reibung μ Q Cos. α ist = MB — M′B′ = v Sec. α und der von Q Sin. α ist = TM′ = MT tg. α = v Sin. α. tg. α. Alle diese 3 Wege v Sin. α; v Sec. α und v Sin. α tg. α würden aber dem Bestreben der zugehörigen Kräfte Q Cos. α; μ Q Cos. α und Q Sin. α entgegengesetzt durchlaufen sein, und es ist also die Gleichung

$$2Pv - 2Q \,\text{Cos.}\, \alpha . v \,\text{Sin.}\, \alpha - 2\mu Q \,\text{Cos.}\, \alpha \, v \,\text{Sec.}\, \alpha$$
$$- 2Q \,\text{Sin.}\, \alpha \, v \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{tg.}\, \alpha = 0,$$

woraus sich

$$P = (\text{tg.}\, \alpha + \mu) Q \text{ ergiebt.}$$

Ist $\mu = 0$; so entsteht P = Q tg. α oder

$$P = \frac{h}{b} Q; \text{ oder}$$

$$P : Q = h : b.$$

Anmerk. Es fällt aus der 2ten Auflösungsart in die Augen, daß es nicht unbedingt erlaubt ist, Kräfte, deren Richtungslinien ganz in einander fallen, als vereint thätig anzusehen und durch Addition oder Subtraction zu vereinigen: denn obgleich hier Q Sin. α und μ Q Cos. α beide in die Richtung von a fallen, so kann man doch nicht schließen, das beiden Kräften gemäße Bestreben nach CB ist $= \mu Q \text{ Cos. } \alpha + Q \text{ Sin. } \alpha$; denn im Fall einer entstehenden Bewegung des Systems nach der Richtung NC würden die von beiden Kräften angegriffenen Puncte verschiedene Wege durchlaufen, nemlich μ Q Cos. α den v Sec. α; und Q Sin. α den v Sin. α tg. α. Es würde also hier das Parallelogramm der Kräfte offenbar zu einem unrichtigen Resultat führen müssen, weil, wenn man dasselbe anwenden wollte, man die Summe oder Differenz der beiden erwähnten Kräfte in Betrachtung ziehen müßte.

Beispiel. Es sei alles wie im Beispiel zum vorigen §., so ist hier

$$Q = \mu (R + P);$$

folglich

$$P = \frac{h + \mu b}{b} \mu (P + R) \text{ und hieraus}$$

$$P = \frac{\mu (\mu b + h)}{b - \mu (\mu b + h)} \cdot R$$

In demselben Zahlenfall wie im Beispiel zum vorigen §. entsteht

$$P = \frac{31 \cdot 100}{149} = 20,8$$

§. 112. Aufgabe. Es sei alles wie in den beiden vorigen §., nur mit der Abweichung, daß die Widerstände Q unter dem Neigungswinkel β gegen die Seiten des Keils wirken *(Fig. 72)*.

Auflösung. Aus Q entspringt ein Normal-Druck $= Q \text{ Sin.} \beta$ auf a und hieraus ein Reibungs-hinderniß $= \mu Q \text{ Sin.} \beta$; man hat also die

Kräfte: $2P$; $2Q$; $2\mu Q \text{ Sin.} \beta$

und, im Fall eine Bewegung, dem Bestreben von 2P gemäß, erfolgte, die zugehörigen Wege

$$NN'; \; DD'; \; BD - B'D';$$

oder $$v; \; \frac{v \text{ Sin.} \alpha}{\text{Sin.} \beta}; \; \frac{v \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Sin.} \beta},$$

und es entsteht also die Gleichung

$$2Pv - 2Q \frac{v \text{ Sin.} \alpha}{\text{Sin.} \beta} - 2\mu Q \text{ Sin.} \beta \frac{v \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Sin.} \beta} = 0$$

und hieraus

$$P = Q \left[\frac{\text{Sin.} \alpha}{\text{Sin.} \beta} + \mu \text{ Sin.} (\alpha + \beta) \right]$$

woraus, wenn man $\beta = 90^\circ$ setzt, die Formel in §. 110, und wenn man $\beta = 90 - \alpha$ nimmt, die in §. 111 entspringt.

Für $\mu = 0$ entsteht $P = \frac{Q \text{ Sin.} \alpha}{\text{Sin.} \beta}$.

Es ist übrigens in den 3 §. dieser Abtheilung vorausgesetzt, daß die Widerstände Q so beschaffen sind, daß keine Drehung erfolgen kann.

Betrachtet man das längs CB thätige Reibungs-Hinderniß $\mu Q \text{ Sin.} \beta$ nicht als ein Reibungs-Hinderniß, sondern als eine selbstthätige Kraft W, so ist

nicht BD — B′D′ sondern BB′ Cos. α der zurückgelegte Weg dieser Kraft, und die Gleichung wird

$$P = Q\,\frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,\beta} + W\,\text{Cos.}\,\alpha$$

Beispiel. In demselben Fall wie in den beiden letzten Beispielen ist hier der Neigungswinkel der schiefen Ebene, worauf R liegt, gegen den Horizont

$$= 90 - \alpha - \beta;\ \text{folglich}$$

$$Q = \mu\,(R + P)\ \text{Sin.}\,(\alpha + \beta) + R\ \text{Cos.}\,(\alpha + \beta);$$

daher

$$P = \left[\frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,\beta} + \mu\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)\right]\left[\mu\,(R + P)\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta) + R\ \text{Cos.}\,(\alpha + \beta)\right]$$

und hieraus

$$P = \frac{[\text{Sin}\,\alpha + \mu\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)]\,[\mu\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta) + \text{Cos.}\,(\alpha + \beta)]}{\text{Sin.}\,\beta - \mu\,\text{Sin.}\,(\alpha + \beta)\,[\text{Sin.}\,\alpha + \mu\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,(\alpha + \beta)]}\,R$$

Ist $\beta = 60°$, und wie in den vorigen Beispielen $R = 100$; $h = 11$; $b = 60$; $\mu = \frac{1}{3}$; so ist

$$\text{Sin.}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{Cos.}\,\beta = \tfrac{1}{2};\ \text{Sin.}\,\alpha = \tfrac{11}{61};$$

$$\text{Cos.}\,\alpha = \tfrac{60}{61};\ \text{folglich Sin.}\,(\alpha + \beta) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}$$

$$\text{und Cos.}\,(\alpha + \beta) = \frac{60 - 11\sqrt{3}}{122}$$

und es ergiebt sich

$$P = 40{,}5.$$

§. 113. Zusatz. Die Theorie des Keils liefert ein Beispiel, wie höchst behutsam man mit dem Gebrauch des Parallelogramms der Kräfte sein muß, und wie sehr gefährlich die Anwendung desselben oft ist. Zuweilen, wie z. B. im vorigen §., wenn $\beta < 90°$,

ist dasselbe, wenn man die Reibung nicht berücksichtigt, zur unmittelbaren Vergleichung der 3 in einer Ebene auf einen Punct wirkenden Kräfte selbst, gar nicht anwendbar, und will man mittelbar das Ziel erreichen, so erhält man verschiedene Resultate, je nachdem man verschiedene Zerlegungen vornimmt.

Man denke sich, um das Gesagte näher zu beleuchten, vorläufig $\beta > 90°$ und bilde (*Fig.* 73) zwischen Q; Q; und 2P das Parallelogramm der Kräfte, so entsteht

$$P = - Q \,\text{Cos.}\, (\alpha + \beta),$$

ein Resultat, welches mit dem $P = \frac{Q \,\text{Sin.}\, \alpha}{\text{Sin.}\, \beta}$ im vorigen §., welches doch wohl unläugbar richtig ist, durchaus nicht übereinstimmt, und blos in dem Fall (also zufällig) paßt, wenn $\beta = 90°$ ist, denn dann entsteht aus ihm

$$P = - Q \,\text{Cos.}\, (\alpha + 90°)$$

oder $P = Q \,\text{Sin.}\, \alpha$ wie §. 110.

Urtheilt man ferner etwa folgendergestalt: Aus Q entspringt eine Normalpressung $= Q \,\text{Sin.}\, \beta$ auf CB (*Fig.* 74) und ein mit CB paralleles Wirken $= - Q \,\text{Cos.}\, \beta$; letzteres geht in Beziehung auf den Keil verloren; und verzeichnet man nun mit ersterem, auf beiden Seiten gedacht, und 2P das Parallelogram, so entspringt

$$P = Q \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Sin.}\, \alpha,$$

ein ebenfalls unrichtiges Resultat, welches auch nur für $\beta = 90°$ paßt.

Will man endlich folgendergestalt schließen: Aus Q entspringt eine Normalpressung auf CB *(Fig. 75)* und ein lothrechtes Bestreben nach oben; erstere

$$= \frac{Q \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha}; \text{ letzteres } = - \frac{Q \text{ Cos. } \beta}{\text{Cos. } \alpha};$$

und setzt man nun letzteres ohne weitere Gründe ganz und gar beiseite, und bildet zwischen

$\frac{Q \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha}$; $\frac{Q \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha}$ und 2 P das Parallelogramm der Kräfte, so entsteht das gewiß falsche Resultat

$$P = \frac{Q \text{ Sin.} (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha} . \text{ Sin. } \alpha,$$

welches aber doch, des einen gewissen Fehlers ohngeachtet, zufällig für den Fall paßt, wenn Q horizontal wirkt, d. h. wenn $\beta = 90 - \alpha$ ist; denn dann entsteht aus der dargestellten Formel

$$P = Q \text{ tg. } \alpha \text{ wie in §. 111.}$$

Durch Erscheinungen, wie die erwähnten, fand sich der Verfasser, mißtrauisch auf die allgemeine Anwendbarkeit des Parallelogramms der Kräfte gemacht, veranlaßt, demselben nicht die erste Stelle in der Statik einzuräumen, sondern die Herleitung desselben aus andern zuvor bewiesenen statischen Wahrheiten abzuleiten. s. den 1sten Band. Wenn ihm sein Beweis, des wohl mit mehr Recht als allgemeinen Grundgesetzes aufzustellenden Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, gelungen ist, so glaubt er, wohl nicht mit Unrecht, den sichern Standpunct für die Wissenschaft gewählt zu haben.

Uebrigens läßt sich, mag β spitz oder stumpf sein, durch eine gewisse Zerlegung (welche mir vom Ober-Landes-Baudirector Eytelwein mitgetheilt wurde) die richtige Gleichung $P = \frac{Q \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \beta}$ finden. Man zerlege nemlich (*Fig.* 76) 2P in normale Wirkungen auf AC und BC, so ergiebt sich jede $= \frac{P}{\text{Sin. } \alpha}$; diese zerlege man denn in eine, in die Richtung von Q und in die andere normal darauf, so ist erstere

$$= \frac{P}{\text{Sin. } \alpha} \cdot \text{Cos.} (\beta - 90) = \frac{P}{\text{Sin. } \alpha} \text{ Sin. } \beta;$$

diese Wirkung muß $=$ Q sein; folglich ist

$$P = \frac{Q \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \beta}.$$

Auch die Gleichung

$$P = Q \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \beta} + \mu Q \text{ Sin. } (\alpha + \beta)$$

läßt sich auf ähnliche Weise durch eine gewisse Zerlegung finden, wenn man nemlich 2P aus 2 Theilen bestehend betrachtet, von welchen der eine blos auf Q, der andere auf die Reibung μ Q Sin. β verwendet wird. Ganz anders muß man aber zerlegen, wenn man die Gleichung

$$P = Q \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \beta} + W \text{ Cos. } \alpha \text{ erhalten will.}$$

Des fünften Abschnitts dritte Abtheilung.

Von der Schraube.

---

§. 114. Erklärung. Wenn man den Mantel eines senkrechten Cylinders *(Fig. 77)* abwickelt, und die parallelen, der Höhe des Cylinders entsprechenden Seiten ag, $\alpha\mu$ *(Fig. 78)* des sich ergebenden rechtwinklichten ebenen Parallelogramms $a\alpha\mu g$ in eine gleiche Anzahl gleicher Theile theilt und die schrägen Linien $a\beta$; $b\gamma$ u. s. w. zieht, so bilden dieselben, wenn das Rechteck wieder in seine vorige Lage als Mantel gebracht wird, eine stetige Curve von doppelter Krümmung, welche eine Schraubenlinie genannt wird. Jede einzelne Linie, wie $a\beta$; $b\gamma$ u. s. w. heißt ein Schraubengang. Jeder der gleichen Theile, wie ab, bc u. s. w., $\alpha\beta$; $b\gamma$ u. s. w. heißt die Höhe eines Schraubengangs. Der Winkel $\beta a\alpha$ heißt die Neigung der Schraubenlinie. Denkt man sich jeden Punct der Schraubenlinie durch eine auf die Achse des Cylinders normale Linie mit dieser Achse verbunden, und verlängert alle diese Verbindungslinien außerhalb des Cylinders um eine gleiche Länge e; so bilden diese Verlängerungen eine aus dem Cylinder hervorragende, aufsteigende Fläche. Denkt man sich diese Fläche körperlich, d. h. betrachtet man jede solche Verlängerung e etwa als Mittellinie eines

rechtwinklichten Parallelogramms, wie *Fig.* 79 oder als Höhe eines gleichschenklichten Dreiecks wie *Fig.* 80, so heißt der Cylinder eine Schraubenspindel; und der um ihn gewundene hevorragende Körper, mag sein Querschnitt ein Rechteck oder ein Dreieck sein, heißt ein Schraubengewinde. Ein cylindrisch ausgehölter Körper mit Vertiefungen von derselben Form, in welchen also die Spindel mit ihrem Gewinde genau einpaßt, heißt eine Schraubenmutter. Die ganze Verbindung heißt eine Schraube. Die Verbindung einer Schraubenspindel mit einem verzahnten Rade, dessen Zähne eine dem Gewinde der Spindel angemessene schiefe Stellung haben, heißt eine Schraube ohne Ende.

§. 115. Aufgabe. An einer Schraube mit einem rechteckigen Schraubengewinde, deren Spindel durch eine Kraft Q nach der Richtung der Achse des Cylinders auf das Gewinde der Mutter gepreßt wird (*Fig.* 81), befindet sich in der Entfernung b von der Achse eine Kraft P, welche nach einer Richtung, die normal auf diejenige Ebene ist, welche man sich durch den Angriffspunct von P und die verticale Achse des Cylinders zu denken hat, das Bestreben äußert, Q lothrecht in die Höhe zu erheben. Man soll P so bestimmen, daß die geringste Vermehrung des gefundenen P eine Erhebung von Q hervorbrigen wird.

Auflösung I. Die Höhe eines Schraubengangs sei $= h$; der Halbmesser der Spindel $= r$; der der äußersten Gränze des Gewindes $= R$. Ein veränder-

licher Halbmesser $> r$ und $< R$ sei $= x$; jeder Schraubengang zu r sei $= a$; also

$$a = \sqrt{h^2 + (2r\pi)^2};$$

jeder Schraubengang zu R sei $= A$; also

$$A = \sqrt{h^2 + (2R\pi)^2};$$

jeder Schraubengang zu x sei $= y$; also

$$y = \sqrt{h^2 + (2x\pi)^2}.$$

Der Theil von Q, welcher auf das zu $x - r$ gehörige Gewinde kommt, sei $= Q'$; die zur Ueberwindung von Q' und der zugehörigen Reibung gehörige Kraft $= P'$. Die Anzahl der Schraubengänge in der Mutter sei $= n$; die obere Fläche jeder zu einem Schraubengang gehörigen Hervorragung $= F$; so verstanden, daß $\frac{A + a}{2} . (R - r)$ als Näherungswerth für F gelten könnte.

Wächst nun x um dx, so wächst Q' um dQ' und P' um dP', und wenn die dem Schraubengang y zugehörige Neigung mit φ bezeichnet wird, so ist der aus dQ' und dP' entspringende Normal-Druck auf den zugehörigen Theil des Gewindes, also auf $n.y.dx$ gleich $dQ'. \text{Cos.}\,\varphi + dP' \text{Sin.}\,\varphi$; also der Reibungswiderstand auf $n\,y\,dx$ gleich

$$\mu\,(\text{Cos.}\,\varphi.\,dQ' + \text{Sin.}\,\varphi.\,dP').$$

Weil nun, wenn dP' den Weg $2b\pi$ seinem Bestreben gemäß, durchliefe, dQ' in derselben Zeit, seinem Bestreben entgegen, den Weg h und der Reibungswiderstand, den y durchlaufen müßte, so ist also

$$2b\pi.dP' - h\,dQ' - y\mu\,(\text{Cos.}\,\varphi\,dQ' + \text{Sin.}\,\varphi\,dP') = 0$$

und folglich

$$dP' = \frac{h + \mu y \text{ Cos. } \phi}{2 b \pi - \mu y \text{ Sin. } \phi} dQ'$$

$$= \frac{h + 2 \pi \mu x}{2 b \pi - \mu h} dQ'.$$

Es verhält sich aber

$$nF : nydx = Q : dQ'$$

und also ist

$$dQ' = \frac{y\,dx}{F} Q; \text{ daher}$$

$$dP' = \frac{Q}{F(2 b \pi - \mu h)} (h + 2 \pi \mu x) y\,dx$$

und folglich

$$P' = \frac{Q}{(2 b \pi - \mu h) F} \int (h + 2 \pi \mu x) y\,dx.$$

Es ist aber

$$2 \pi x = h \text{ Cotg. } \phi; \quad y = h \text{ Cosec. } \phi;$$

daher

$$\int (h + 2 \pi \mu x) y\,dx$$

$$= \int (h + \mu h \text{ Cotg. } \phi) h \text{ Cosec. } \phi . \frac{h}{2\pi} d \text{ Cotg. } \phi$$

$$= \frac{h^3}{2\pi} \left[- \int \frac{d\phi}{\text{Sin. } \phi^3} - \mu \int \frac{d \text{ Sin. } \phi}{\text{Sin. } \phi^4} \right]$$

$$= \frac{h^3}{2\pi} \left[\frac{\text{Cos. } \phi}{2 \text{ Sin. } \phi^2} - \tfrac{1}{2} \ln \text{tg. } \frac{\phi}{2} + \frac{\mu}{3 \text{ Sin. } \phi^3} \right] + C$$

$$= \frac{h^3}{12\pi} \Big[3 \text{ Cotg. } \phi \text{ Cosec. } \phi - 3 \ln(\text{Cosec. } \phi - \text{Cotg. } \phi)$$

$$+ 2 \mu \text{ Cosec. } \phi^3 \Big] + C$$

$$= \frac{h^3}{12\pi} \left[\frac{6 \pi x y}{h^2} - 3 \ln \frac{y - 2 \pi x}{h} + \frac{2 \mu y^3}{h^3} \right] + C$$

Für $x = r$ wird $y = a$; dies Integral selbst aber $= 0$; also ist

$$C = \frac{h^3}{12\pi}\left[-\frac{6\pi r a}{h^2} + 3\ln\frac{a-2\pi r}{h} - \frac{2\mu a^3}{h^3}\right]$$

folglich hat man also, wenn man R für x und daher A für y schreibt

$$P = \frac{h^3}{12\pi}\left[\frac{6\pi RA}{h^2} - 3\ln\frac{A-2\pi R}{h} + \frac{2\mu A^3}{h^3}\right.$$

$$\left.- \frac{6\pi r a}{h^2} + 3\ln\frac{a-2\pi r}{h} - \frac{2\mu a^3}{h^3}\right] \cdot \frac{Q}{(2b\pi - \mu h)F}$$

oder

$$P = \frac{h^3 Q}{12\pi(2b\pi - \mu h)F}\left[\frac{6\pi(RA - ra)}{h^2}\right.$$

$$\left.+ \frac{2\mu(A^3 - a^3)}{h^3} - 3\ln\frac{A-2\pi R}{a-2\pi r}\right]$$

Es ist aber, wenn man, nach vollendeter Integration R für x und A für y setzt,

$$F = \int y\, dx = \int h\,\mathrm{Cosec}\,\phi . \frac{h}{2\pi}\, d\,\mathrm{Cotg.}\,\phi$$

$$= \frac{h^2}{2\pi}\int -\frac{d\phi}{\mathrm{Sin.}\,\phi^3}$$

$$= \frac{h^2}{4\pi}\left[\mathrm{Cotg}\,\phi\,\mathrm{Cosec}\,\phi - \ln(\mathrm{Cosec}\,\phi - \mathrm{Cotg}\,\phi\right] + C$$

$$= \frac{h^2}{4\pi}\left[\frac{2\pi x y}{h^2} - \ln\frac{y-2\pi x}{h}\right]$$

$$+ \frac{h^2}{4\pi}\left[-\frac{2\pi r a}{h^2} + \ln\frac{a-2\pi r}{h}\right]$$

also vollständig

$$F = \frac{h^2}{4\pi}\left[\frac{2\pi(RA - ra)}{h^2} - \ln\frac{A-2\pi R}{a-2\pi r}\right]$$

folglich, wenn man diesen für F gefundenen Ausdruck substituirt, und dann reducirt,

$$\text{(I.)}\quad P = \frac{hQ}{3(2b\pi - \mu h)} \cdot \left[3 + \frac{2\mu(A^3 - a^3)}{2\pi h(AR - ar) + h^3 \ln\frac{a-2r\pi}{A-2R\pi}}\right]$$

oder, wenn man für F seinen Näherungswerth

$$\frac{A+a}{2}(R-r) \text{ setzt,}$$

$$\text{(II.)}\quad P = \frac{hQ}{3(2b\pi - \mu h)} \cdot \left[3 + \frac{\mu(A^3 - a^3)}{\pi h\,(A+a)(R-r)}\right]$$

Auflösung II. Setzt man $\frac{R+r}{2} = \varrho$ und nimmt sämmtliche Widerstände in den Schraubengang $\sqrt{h^2 + (2\varrho\pi)^2} = \alpha$ als vereint an, so ist der Reibung erzeugende Normal-Druck, wenn β die Neigung von α ausdrückt,

$$= Q \,\text{Cos.}\, \beta + P \,\text{Sin.}\, \beta;$$

also die Reibung selbst,

$$= \mu (Q \,\text{Cos.}\, \beta + P \,\text{Sin.}\, \beta); \text{ folglich}$$

$$P.2b\pi - Qh - \mu(Q\,\text{Cos.}\,\beta + P\,\text{Sin.}\,\beta).\,\alpha = 0;$$

oder, weil $\alpha \,\text{Cos.}\, \beta = 2\varrho\pi$ und
$\alpha \,\text{Sin.}\, \beta = h$ ist,

$$\text{(III.)}\quad P = \frac{h + 2\mu\pi\varrho}{2b\pi - \mu h} \cdot Q.$$

Zu bequemerer Vergleichung der gefundenen vollständigen Formel (I.) und der beiden Näherungsformeln (II.) und (III.) folgen sie hier noch einmal, in etwas veränderter Gestalt:

$$\text{(I.)}\ P = \frac{Q}{2b\pi - \mu h}\left[h + \mu \cdot \frac{2(A^3 - a^3)}{3\left[2\pi(AR - ar) + h^2 . \ln \frac{a - 2r\pi}{A - 2R\pi}\right]}\right]$$

$$\text{(II.)}\ P = \frac{Q}{2b\pi - \mu h}\left[h + \mu \cdot \frac{A^3 - a^3}{3\pi(A+a)(R-r)}\right]$$

$$\text{(III.)}\ P = \frac{Q}{2b\pi - \mu h}\left[h + \mu \cdot 2\varrho\pi\right]$$

Bei-

Beispiel. Es sei $r = 2\frac{1}{2}''$; $R = 3''$; $h = 1''$; $\mu = \frac{1}{5}$; $b = 60''$; folglich

$$a = \sqrt{1^2 + (5.\pi)^2} = 15,73$$

$$A = \sqrt{1^2 + (6\pi)^2} = 18,87$$

so ergiebt sich

$$(I.)\ P = \frac{Q}{376,99 - 0,2} \cdot \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{5654,1}{3(108,604 + 0,008)}\right]$$

$$= \frac{Q}{376,79} \cdot (1 + 3,470)$$

$$= 0,01186337 \cdot Q$$

$$(II.)\ P = \frac{Q}{376,79} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2827,05}{3.54,35}\right)$$

$$= \frac{Q}{376,79} \cdot (1 + 3,467)$$

$$= 0,01185541 \cdot Q$$

$$(III.)\ P = \frac{Q}{376,79} \cdot (1 + 3,458)$$

$$= 0,01183152 \cdot Q.$$

Die höchst geringe Verschiedenheit dieser drei Resultate berechtigt vollkommen, sich für den practischen Gebrauch der Formel

$$P = \frac{h + \mu.2\varrho\pi}{2b\pi - \mu h} Q$$

oder, weil μh gegen $2b\pi$ gewöhnlich höchst unbedeutend ist, der noch bequemeren

$$(IV.)\ P = \left(\frac{h}{2b\pi} + \mu \frac{\varrho}{b}\right) Q$$

zu bedienen.

Die Formel (IV.) liefert bei dem obigen Beispiel $P = 0,0118252 \cdot Q$, so daß man also in diesem Fall bei ihrem Gebrauch noch nicht ganz um $\frac{4}{100000}$ Q fehlt.

§. 116. Zusatz. Zuweilen erlaubt man sich auch folgende Ansicht:

Es wird zuvörderst $b = \varrho$ gesetzt, woraus sich dann die Kraft, welche an der mittleren Peripherie der Spindel erforderlich wäre,

$$= \frac{h + \mu . 2\varrho\pi}{2\varrho\pi - \mu h} Q \text{ ergiebt.}$$

Nun reducirt man diese Kraft auf den Hebelsarm b und findet also

$$P = \frac{\varrho}{b} . \frac{h + \mu 2\varrho\pi}{2\varrho\pi - \mu h} Q$$

welches, bei den Abmessungen des vorigen Beispiels,

$$P = 0{,}011964 . Q \text{ giebt}$$

Die offenbare Unrichtigkeit dieser Ansicht fällt in die Augen, wenn man überlegt, daß hier der aus der Kraft entstehende Reibungswiderstand, einer Kraft entsprechend, bestimmt ist, welche bei weitem größer ist als die, welche wirklich thätig ist (nemlich der $\frac{b}{\varrho}$ P gemäß).

Ueberhaupt kann man nie eine Kraft von einem Punct auf einen andern reduciren, wenn die Kraft selbst einen Druck erzeugt, der Reibung zur Folge hat.

Für diejenigen, welche die Bestimmung des Reibung erzeugenden Normal-Drucks

$$\text{Cos. } \varphi \text{ d } Q' + \text{Sin. } \varphi \text{ d } P'$$

(siehe den vorigen §. die erste Auflösung) nicht als richtig anerkennen möchten, stehe hier noch folgende Erörterung:

Auf den 2 im lothrechten Durchschnitt dargestellten Körpern C, D (*Fig.* 62), deren obere Kanten man sich der leichteren Ansicht wegen in einer horizontalen Linie denken kann, liegt horizontal eine feste Linie AB, und ist um eine feste lothrechte Achse EF drehbar, zu welcher Drehung sie durch eine in B tangential, also nach horizontaler Richtung wirkenden Kraft P angereizt wird. Die Unterlagen in C und D stelle man sich als Durchschnitte eines kreisförmigen steigenden Ringes vor, so, daß jedes Element in M und N sich unter dem Winkel φ gegen den Horizont neigt, folglich wenn P eine Drehung um EF erzeugt, die Linie AB, auf M steigt, auf N aber sinkt. Wenn nun AB durch eine etwa in der Mitte zwischen C und D (wo man sich auch EF denken kann) thätige Wirkung Q lothrecht auf C und D gepreßt wird, und Q so groß ist, daß die aus P entspringende, auf die schiefe Ebene des Ringes normale Pressung $= P \cdot \text{Sin.}\, \varphi$ die feste Linie AB bei B nicht so stark niederdrücken kann, daß eine Drehung der Linie um M, also eine Erhebung bei N erfolgt, so ist der Normal-Druck auf das Element in M

$$= \tfrac{1}{2} Q \,\text{Cos.}\, \varphi + P \,\text{Sin.}\, \varphi \,\frac{b + \varrho}{2\varrho}$$

und der daraus entspringende Reibungswiderstand

$$= \mu \left(\tfrac{1}{2} Q \,\text{Cos.}\, \varphi + P \,\text{Sin.}\, \varphi \,\frac{b + \varrho}{2\varrho}\right)$$

Ferner ist der Normal-Druck in N

$$= \tfrac{1}{2} Q \,\text{Cos.}\, \varphi - P \,\text{Sin.}\, \varphi \cdot \frac{b - \varrho}{2\varrho}$$

und der daraus entspringende Reibungswiderstand

$$= \mu \left(\tfrac{1}{2} Q \operatorname{Cos.} \varphi - P \operatorname{Sin.} \varphi \frac{b - \varrho}{2 \varrho} \right).$$

Folglich der gesammte Reibungswiderstand

$$= \mu \left(Q \operatorname{Cos.} \varphi + P \operatorname{Sin.} \varphi \right),$$

woraus die Richtigkeit der erwähnten Bestimmung, obgleich die gewählte Lage hier in etwas von der bei der Schraube verschieden ist, erhellet.

Es könnte vielleicht einen Anfänger auch noch unrichtig erscheinen, daß bei der Theorie der Schraube aus der Kraft dP' der Normal-Druck $\operatorname{Sin.} \varphi \, dP'$ als Reibung erzeugend, entnommen, und dennoch nachher sie, und die ursprüngliche Kraft dP' ganz, in Rechnung gebracht wurde, statt daß vielleicht nach seiner Meinung nicht mehr sie und die ursprüngliche dP', sondern die beiden Seitenkräfte, die: $dP' \operatorname{Cos.} \varphi$, welche Erhebung auf der schiefen Ebene des Gewindes beabsichtigt, und die $\operatorname{Sin.} \varphi \, dP'$, welche auf Reibung wirkt, hätten in Betrachtung gezogen werden müssen. Die Gleichgültigkeit beider Ansichten wird ihm gleich ins Auge fallen, wenn er die mechanischen Momente bildet; ist nemlich $2 b \pi$ der Weg von dP', so würde $dP' \operatorname{Cos.} \varphi$ in derselben Zeit den Weg $2 b \pi \operatorname{Sec.} \varphi$ durchlaufen, und es ist

$$dP' \operatorname{Cos.} \varphi \,.\, 2 b \pi \operatorname{Sec.} \varphi$$

gleich $dP' \,.\, 2 b \pi$, weil $\operatorname{Cos.} \varphi \operatorname{Sec.} \varphi = 1$ ist.

Der Grund, warum immer, wenn Reibung ins Spiel kommt, der Normal-Druck bestimmt werden muß, liegt darinnen, daß μ

das Verhältniß der Reibung zum Normal-Druck bezeichnet.

Uebrigens ist es dann einerlei, ob man bei der weiteren Bildung der mechanischen Momente die ursprüngliche Kraft selbst, oder ihre 2te Seitenkraft benutzt.

§. 117. Aufgabe. Die Aufgabe sei dieselbe, wie die in §. 115., nur mit der Verschiedenheit, daß das Gewinde ein gleichschenklichtes Dreieck, nicht ein Rechteck bilde.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bedeutung der Buchstaben in §. 115. bezeichne außerdem noch (*Fig.* 83) β den Neigungswinkel der Schenkel des gleichschenklichten Dreiecks, und z den, jedes Elements der Begränzungsfläche des Gewindes gegen die Horizontalebene, so entspringt aus dP' eine Normalpressung auf die Linien y gleich $dP'.\ \mathrm{Sin.}\ \varphi$, und wird nun der Winkel, welchen die Richtung dieser Pressung mit der Normale auf das Element der Begränzungsfläche des Gewindes bildet, durch λ ausgedrückt, so ist die aus dP' entspringende Normalpressung auf das Gewinde $= \mathrm{Sin.}\ \varphi\ \mathrm{Cos.}\ \lambda\ dP'$ und weil die zu dQ' gehörige $= \mathrm{Cos.}\ z\ dQ'$ ist, so hat man also die Reibung auf $\blacksquare$ y dx Sec. β gleich

$$\mu\ (\mathrm{Sin.}\ \varphi\ \mathrm{Cos.}\ \lambda\ dP' + \mathrm{Cos.}\ z\ dQ')$$

und es ist demnach, ganz wie in §. 115., die Grundgleichung

$$2b\pi.\ dP' - h\,dQ' - y.\mu\ (\mathrm{Sin.}\ \varphi\ \mathrm{Cos.}\ \lambda\ dP' + \mathrm{Cos.}\ z\ dQ') = 0,$$

woraus sich

$$P' = \int \frac{h + \mu y \, Cos. z}{2 b \pi - \mu y \, Sin. \varphi \, Cos \lambda} dQ' \text{ ergiebt.}$$

Um Cos. z und Cos. λ als Functionen von φ darzustellen, sei AB (*Fig.* 83 u. 84) = dx; also wenn BC vertical genommen wird, AC = Sec. β. dx; macht man nun ABD = 90°, und nimmt BD (in der horizontalen Ebene durch AB, also auch normal auf CB) = CB Cotg. φ, so stellt die Ebene ACD ein Element der Begränzungsfläche des Gewindes dar. Legt man nun ferner durch CB eine auf AD normale Ebene CBE, so ist $\angle$ CEB gleich z. Es ist demnach, wenn der Kürze wegen CB = 1 gesetzt wird,

$$AE : AB = AB : AD; \text{ oder}$$

$$AE : Cotg. \beta = Cotg. \beta : \sqrt{Cotg. \beta^2 + Cotg. \varphi^2};$$

also $AE = \frac{Cotg. \beta^2}{\sqrt{Cotg. \beta^2 + Cotg. \varphi^2}}$; daher

$$CE \text{ oder } q = \sqrt{AC^2 - AE^2}$$

$$= \sqrt{Cosec. \beta^2 - \frac{Cotg. \beta^4}{Cotg. \beta^2 + Cotg. \varphi^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{Cos. \beta^2 \, tg \, \varphi^2 + 1}{Cos. \beta^2 \, tg. \varphi^2 + Sin. \beta^2}};$$

ferner aus q Sin. z = 1,

$$Sin. z = \sqrt{\frac{Cos \, \beta^2 \, tg. \varphi^2 + Sin. \beta^2}{Cos. \beta^2 \, tg. \varphi^2 + 1}}; \text{ also}$$

$$Cos. z = \frac{Cos. \beta}{\sqrt{Cos. \beta^2 \, tg. \varphi^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{Sec. \beta^2 + tg. \varphi^2}}$$

Weil nun der aus dP' entspringende, in der Verticalebene durch ein Element in y belegene Normal-Druck auf ny = Sin. φ dP' und seine Rich-

tung CF ist, wenn man nemlich BF in der Verlängerung von DB und FC normal auf DC nimmt, so wird, wenn GC in C normal auf ACD steht, $\angle$ FCG $= \lambda$ sein. Man verlängere EB bis die Verlängerung CG in G schneidet, und ziehe GF, so ist $BG = \text{tg. } z$; $BF = \text{tg. } \varphi$; $CG = \text{Sec. } z$; $CF = \text{Sec. } \varphi$; ferner

$$BD \text{ Cos. } DBE = q \text{ Cos. } z; \text{ also}$$

$$\text{Cos. } DBE = \text{Cos. } FBG = \frac{q \text{ Cos. } z}{\text{Cotg. } \varphi}$$

$$= \frac{\text{Cos. } \beta}{\text{Cotg. } \varphi \sqrt{\text{Cos. } \beta^2 \text{ tg. } \varphi^2 + \text{Sin. } \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg. } \beta^2 \text{Cotg. } \varphi^2}}.$$

Setzt man nun diese Werthe in folgenden doppelten Ausdruck für GF^2, nemlich in

$$CG^2 + CF^2 - 2. CG. CF \text{ Cos. } \lambda = BG^2 + BF^2 - 2 BG. BF \text{ Cos. } FBG$$

und entwickelt Cos. λ, so ergiebt sich

$$\text{Cos. } \lambda = \text{Cos. } \varphi \text{ Cos. } z + \frac{\text{Sin. } \varphi \text{ Sin. } z}{\sqrt{1 + \text{tg. } \beta^2 \text{ Cotg. } \varphi^2}}$$

oder, für Cos. z und Sin. z die vorhin gefundenen Ausdrücke substituirt,

$$\text{Cos. } \lambda = \frac{\text{Sec. } \varphi}{\sqrt{\text{Sec. } \beta^2 + \text{tg. } \varphi^2}}.$$

Da nun ferner $dQ' = \frac{\text{Sec. } \beta. \, y \, dx}{F}. \, Q$

$$= \frac{\text{Sec. } \beta. \text{ h Cosec. } \varphi. \text{ h d Cotg. } \varphi}{2 \pi F} Q$$

$$= - \frac{h^2 \text{ Sec. } \beta \, Q}{2 \pi F} \cdot \frac{d\varphi}{\text{Sin. } \varphi^3} \text{ ist,}$$

so entsteht, wenn man die bisherigen Werthe in

$$P' = \int \frac{h + \mu y \text{ Cos. } z}{2 b \pi - \mu y \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \lambda} dQ' \text{ substituirt,}$$

auch h Cosec. φ für y setzt,

$$P' = -\frac{h^3 Q Sec\beta}{2\pi F}\int \frac{\sqrt{Sec\beta^2 + tg\varphi^2} + \mu\, Cosec.\varphi}{2b\pi\sqrt{Sec\beta^2 + tg\varphi^2} - \mu h\, Sec.\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{Sin.\varphi^3}$$

$$= -\frac{h^3 Q Sec\beta}{2\pi F}\int \frac{\sqrt{1 + tg\beta^2 Cos\varphi^2} + \mu\, Cotg.\varphi}{2b\pi\sqrt{1 + tg\beta^2 Cos\varphi^2} - \mu h} \cdot \frac{d\varphi}{Sin.\varphi^3}$$

Die Aufsuchung des Werths für dieses Integral führt auf ungemeine Weitläuftigkeiten; insofern aber μh in allen Fällen der Anwendung höchst unbedeutend gegen das erste Glied im Nenner ist (s. §. 115. Beisp.) so kann man μh außer Betracht lassen, und es bleibt immer noch mit großer Genauigkeit

$$P' = -\frac{h^3 Q\, Sec.\beta}{4b\pi^2 F}\left(\int \frac{d\varphi}{Sin.\varphi^3}\right.$$

$$\left. + \mu\, Cotg.\beta \int \frac{d\, Sin.\varphi}{Sin.\varphi^4\sqrt{Cosec.\beta^2 - Sin.\varphi^2}}\right)$$

oder nach Meier Hirsch Integraltafeln pag. 274 u. 144

$$P' = -\frac{h^3 Q\, Sec.\beta}{4\pi^2 bF}\left[-\tfrac{1}{2}\, Cotg.\varphi\, Cosec.\varphi\right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\ln(Cosec.\varphi - Cotg.\varphi) + \mu\, Cotg.\beta\left(-\frac{1}{3 Cosec\beta^2 Sin\varphi^3}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{3\, Cosec.\beta^4\, Sin.\varphi}\right)\sqrt{Cosec\beta^2 - Sin.\varphi^2}\right] + C$$

$$= \frac{h^3 Q\, Sec.\beta}{24\pi^2 bF}\Big[3\, Cotg\varphi\, Cosec\varphi - 3\ln(Cosec\varphi - Cotg\varphi)$$

$$+ 2\mu\, Cos\beta(Coses\varphi^2 + 2 Sin\beta^2)\sqrt{Cosec\varphi^2 - Sin\beta^2}\Big] + C$$

$$= \frac{h^3 Q\, Sec.\beta}{24\pi^2 bF}\left(\frac{6\pi xy}{h^2} - 3\ln\frac{y - 2\pi x}{h}\right.$$

$$\left. + 2\mu\, Cos.\beta\, \frac{y^2 + 2h^2\, Sin.\beta^2}{h^3}\sqrt{y^2 - h^2\, Sin.\beta^2}\right) + C$$

Für $y = a$ und $x = r$ ergiebt sich hieraus Cost.

und dann, wenn A für y und R für x gesetzt wird, erhält man vollständig

$$P = \frac{h^3 Q \,\text{Sec.}\beta}{24\pi^2 bF}\Big[\frac{6\pi(AR - ar)}{h^2} - 3\ln\frac{A - 2\pi R}{a - 2\pi r}$$

$$+ \frac{2\mu \,\text{Cos.}\beta}{h^3}\big[(A^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{A^2 - h^2 \text{Sin.}\beta^2}$$

$$- (a^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{a^2 - h^2 \,\text{Sin.}\beta^2}\,\big]\Big]$$

Es ist aber

$$F = \frac{h^2 \,\text{Sec.}\beta}{4\pi}\Big[\frac{2\pi(AR - ar)}{h^2} - \ln\frac{A - 2\pi R}{a - 2\pi r}\Big]$$

und substituirt man diesen Werth, so ergiebt sich

$$P = \frac{Q}{2b\pi}\Big[h + \big[2\mu[(A^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{A^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}$$

$$-(a^2 + 2h^2 \text{Sin}\beta^2)\sqrt{a^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}]\big] : \Big[3h^2 \text{Sec}\beta\Big(\frac{2\pi(AR-ar)}{h^2}$$

$$+ \ln\frac{a - 2\pi r}{A - 2\pi R}\Big)\Big]\Big]$$

oder

$$\text{(I)}\; P = \frac{Q}{2b\pi}\Big[h + \big[2\mu[(A^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{A^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}$$

$$-(a^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{a^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}]\big] : \Big[3\text{Sec}\beta\Big(2\pi(AR-ar)$$

$$+ h^2 \ln\frac{a - 2\pi r}{A - 2\pi R}\Big)\Big]\Big]$$

Setzt man im Nenner des 2ten Gliedes in den Klammern seinen Werth, aus dem Näherungswerth für F, nemlich $F = \frac{A + a}{2}(R - r)\,\text{Sec.}\beta$; so entsteht

$$\text{(II)}\; P = \frac{Q}{2b\pi}\Big[h + \big[\mu[(A^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{A^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}$$

$$-(a^2 + 2h^2 \,\text{Sin.}\beta^2)\sqrt{a^2 - h^2 \text{Sin}\beta^2}]\big] : \big[3\pi \,\text{Sec}\beta\,(A+a)(R-r)\big]\Big]$$

Näherungsweise kann man sich auch der Formel bedienen, nemlich

$$\text{(III)}\quad P = \left(\frac{h}{2b\pi} + \mu\,\frac{r}{b}\right) Q.$$

Beispiel. Wählt man, wenn es auch keine zweckmäßige Anordnung ist, zur Vergleichung dieselben Zahlen, wie im Beispiel zu §. 115, so entsteht

$$\text{(I)}\quad P = 0{,}0091657 \,.\, Q$$

$$\text{(II)}\quad P = 0{,}0091606 \,.\, Q$$

$$\text{(III)}\quad P = 0{,}0109855 \,.\, Q$$

§. 118. Zusatz. Ohne Rücksicht auf Reibung ist sowohl hier als in §. 115

$$P = \frac{h}{2b\pi} \,.\, Q$$

und hienach wäre in dem gewählten Zahlenfall

$$P = 0{,}00265 \,.\, Q.$$

§. 119. Aufgabe. An einer Schraube ohne Ende, deren Spindel horizontal liegt, wirkt normal auf eine durch die Achse der Spindel gelegte Horizontalebene in der Entfernung b von der Achse eine Kraft = P; an der horizontal liegenden Welle des verzähnten Rades (deren Achse die Verticalebene durch die Achse der Spindel normal trifft) wirkt in der Peripherie derselben tangential und lothrecht ein Widerstand Q; man soll denjenigen Werth für P bestimmen, bei welchem die geringste Vermehrung des gefundenen P eine Erhebung von Q hervorbringen würde *(Fig. 85)*.

Auflösung. Das Gewicht des verzähnten Rades nebst Welle und Zapfen sei = W; der Halb-

messer derselben bis zur Mitte des angreifenden Raumes der Zähne gemessen, $= R'$; der Hebelsarm von $Q = r'$; der Halbmesser der Zapfen $= \varrho'$. Die Gewalt, welche im höchsten Zahn horizontal, also auch tangential dem Bestreben von Q entgegenwirken müßte, um, wenn sie um das Geringste vermehrt würde, Q zu erheben, sei $= x$, so daß also x die Einwirkung ausdrückt, welche, aus P entstehend, das Gewinde der Spindel auf den Zahn äußern muß, so wirkt auf die Zapfen der Welle eine lothrechte Gewalt $= Q + W$ und eine horizontale $= x$, woraus der mittlere Druck $= \sqrt{(Q + W)^2 + x^2}$ und aus ihm ein Reibungshinderniß $= \mu' \sqrt{(Q + W)^2 + x^2}$ entspringt.

Man hat also in Beziehung auf die Achse der Welle die Gleichung

$$x R' = Q r' + \varrho' . \mu' . \sqrt{(Q + W)^2 + x^2},$$

in welcher man, ohne der Genauigkeit wesentlich zu schaden, für x unterm Wurzelzeichen denjenigen Werth näherungsweise setzen kann, welchen x haben würde, wenn die Reibung blos aus dem lothrechten Druck $Q + W$ entspränge; dieser Werth ist

$$\frac{Q r' + \varrho' \mu' (Q + W)}{R'} = N \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{Q r' + \varrho' \mu' . \sqrt{(Q + W)^2 + N^2}}{R'}$$

Fände nun an dem Zapfen der Spindel keine Reibung statt, so wäre, nach §. 115, wenn man sich der hinreichend genauen Formel (IV.) bedient, die verlangte Kraft

$$= \left(\frac{h}{2 b \pi} + \mu \frac{\varrho}{b} \right) x.$$

Um nun noch die Vermehrung dieser Kraft wegen der Reibung an den Zapfen der Spindel zu bestimmen, sei das Gewicht der Spindel nebst Zapfen $= V$; der Halbmesser der Zapfen $= \varrho''$; so ist der lothrechte Druck auf die Zapfen

$$= V + P;$$

also die daraus entspringende Reibung

$$= \mu' (V + P),$$

und die zu ihrer Ueberwindung an den Endpunct von b erforderliche Kraft

$$= \frac{\varrho'' \mu' (V + P)}{b}.$$

Insofern endlich noch, der Zapfen bei A durch die Gewalt $x - \mu (V + P)$ normal, mit seiner Grundfläche auf die Hinterlage angepreßt wird, so entsteht daraus ein Reibungshinderniß

$$= \mu [x - \mu (V + P)],$$

dessen Hebelsarm $= \frac{2}{3} \varrho''$ ist. Die zur Ueberwindung derselben im Endpunct von b erforderliche Kraft ist also

$$= \frac{2}{3} \frac{\varrho''}{b} \cdot \mu [x - \mu (V + P)],$$

und folglich hat man nun

$$P = \left(\frac{h}{2 b \pi} + \frac{\mu \varrho}{b}\right) x + \frac{\varrho'' \mu' (V+P)}{b}$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{\varrho'' \mu x - \varrho'' \mu^2 (V + P)}{b}$$

woraus sich

$$P = [(\mu' - \tfrac{2}{3}\mu^2) \varrho'' R' V + [\tfrac{1}{2\pi} h + \mu(\varrho + \tfrac{2}{3}\varrho'')] [Q r' + \varrho' \mu' \sqrt{(Q+W)^2 + N^2}]] : [[b - \varrho'' (\mu' - \tfrac{2}{3}\mu^2)] R']$$

ergiebt.

Ohne Rücksicht auf Reibung folgt hieraus, oder noch leichter unmittelbar

$$P = \frac{h\, r'}{2\,\pi\, b\, R'}\ Q.$$

Beispiel. Es sei $Q = 12000$ ℔; $\varrho' = 1''$; $r' = 10''$; $R' = 50''$; $W = 600$ ℔; $\varrho = 2\frac{3}{4}''$; $\mu' = \frac{1}{6}$; $\mu = \frac{1}{5}$; $h = 1''$; $\varrho'' = \frac{1}{2}''$; $V = 120$ ℔; $b = 60''$; so findet man $N = 2442$ und dann

$$P = 31,8 \text{ ℔}.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung wäre nur

$$P = 6,36 \text{ ℔}.$$

§. 120. Zusatz. In Hinsicht der Bestimmung des Reibung erzeugenden Drucks

$$x - \mu\,(V + P)$$

auf die Hinterlage gegen die Grundfläche des Zapfens bei A, überlege man, um sich von der Richtigkeit dieses Ausdrucks zu überzeugen, folgendes:

Wenn (*Fig.* 86) AB einen Körper mit horizontaler Oberfläche und DC eine lothrechte Wand darstellt und es liegt auf AB ein Körper vom Gewicht Q, welcher zugleich mit einer seiner Seitenflächen an CD anliegt, so wird, wenn Q durch eine nach horizontaler, also auf CD normaler Richtung von einer Kraft P angegriffen wird, die Wand CD durch Fortpflanzung nicht den ganzen Druck P, sondern nur den, $P - \mu Q$ empfangen, denn, wäre $P <$ oder $= \mu Q$, so hätte die Wand gar keine Einwirkung auszuhalten, und nur, wenn $P > \mu Q$ ist, wird der Ueberschuß $P - \mu Q$ als die Thätigkeit, welche, wenn die Wand

nicht vorhanden wäre, eine Bewegung von Q auf BA zur Folge haben würde, einen Druck auf diese Wand hervorbringen. Im vorigen §. ist wohl in allen Fällen der Anwendung $x > \mu (V + P)$. Sollte es indessen nicht der Fall sein, was man leicht beurtheilen kann, da x schon bestimmt ist, so würde diese Reibung aus der Gleichung wegzulassen sein. Durch eine geneigte Lage der Spindel gegen B läßt sich dieser Reibungswiderstand immer vermindern.

Sechster Abschnitt.

Von der Vertheilung des Drucks auf die Unterstützungspuncte eines festen Körpers.

§. 121. Aufgabe. Der Körper *Fig.* 87 ist in den 3 in eine horizontale Ebene fallenden Puncten A; B; C unterstützt, d. h. er wird durch vertical nach oben wirkende Kräfte x; y; z getragen. Sein Schwerpunct D liegt so, daß eine lothrechte Linie aus demselben herabgezogen die Ebene des Dreiecks ABC innerhalb desselben, etwa in E schneidet; man soll die Größe der 3 Kräfte x; y; z fürs Gleichgewicht bestimmen.

Auflösung. In dem Grundriß *Fig.* 88 ist, BF normal auf AC verstanden, die Bezeichnung angedeutet.

Nach §. 63. I. Bd. ergeben sich nun gleich folgende 3 Gleichungen zur Bestimmung von x; y und z, bei welchen in der 2ten die Momente in Beziehung auf AC, in der 3ten in Beziehung auf BF genommen sind:

1) $x + y + z = Q$;

2) $yh = Qc$;

3) $zb = Qe + x.a$;

und aus ihnen

$$x = \frac{h(b-e) - bc}{h(a+b)} \cdot Q$$

$$y = \frac{c}{h} Q \text{ oder auch} = \frac{\Delta ACE}{\Delta ABC} \cdot Q;$$

$$z = \frac{h(e+a) - ac}{h(a+b)} Q.$$

Die Werthe für x und z bestimmen sich eben so durch ein Verhältniß zweier Dreiecke, wie der für y, wenn man, am bequemsten, die Momente auf die gegenüber liegenden Seiten nimmt.

Ist $c = \frac{1}{3} h$ und $e = \frac{1}{3}(a+b) - \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} b - \frac{1}{3} a$, d. h. ist E der Schwerpunct des Dreiecks ABC, so ergiebt sich

$$x = y = z = \frac{1}{3} Q.$$

§. 122. Zusatz. Für $c = 0$, d. h. wenn die lothrechte Linie, aus dem Schwerpunct D herabgezogen, AC trifft, wird

$$x = \frac{b-e}{a+b} Q; \; z = \frac{a+e}{a+b} Q \text{ wie §. 54;}$$

aber y wird $= 0$; mag h so groß oder so klein sein, wie es will; also wird auch $y = 0$ wenn $h = 0$ ist, d. h. eine feste gerade horizontale Linie AC *(Fig. 89)*, welche von einer Kraft Q nach lothrechter Richtung angegriffen wird, und in 2 Puncten A, C, welche also ebenfalls in eine Horizontale fallen, unterstützt ist, äußert nur auf diese 2 Puncte einen Druck und nicht auf einen dritten F, der nachher noch als Unterstützung angebracht wird, wenn nemlich die Linie selbst fest und nicht elastisch ist. Die allgemeine Beantwor-

tung

tung der Frage: welche 2 der 3 Puncte den Druck empfangen, vorausgesetzt, daß die auf sie gelegte Linie nicht alle 3 zugleich in einen und denselben Augenblick berührt, kann also nicht anders gegeben werden, als: die beiden ersten; denn angenommen, die feste gerade Linie AC läge in A und C auf Unterlagen, deren Gegenwirkungen,

$$x = \frac{b - e}{a + b} Q \text{ und } z = \frac{a + e}{a + b} Q$$

zusammenaddirt, die Summe Q geben, und man wollte nun in einem 3ten Punct F noch eine Unterstützung anbringen, so wird diese, wenn man sich dasselbe allmählig von unten herauf herangerückt denkt, auch dann noch keine Einwirkung, von Q herrührend, erleiden, wenn sie an der Linie AC anliegt, so daß die 3 Puncte A, F, C in eine Horizontale fallen. Nur dann erst, wenn durch ein weiteres Heraufrücken des Punctes F derselbe höher (sei es auch noch so wenig) wie A und C zu liegen kommt, verlegt sich der Druck auf F und denjenigen der beiden andern Puncte, zwischen welchen und F die Richtung von Q fällt. Derselbe Fall tritt ein, wenn man den festen unelastischen Körper (*Fig.* 87), wenn er, auf den 3 Puncten A, B, C ruhend, mit den Gegenwirkungen x, y, z derselben im Gleichgewicht ist, nun noch in einen oder mehren andern Puncten unterstützen wollte. Jede neue Unterlage, wenn sie dicht unter dem Körper angebracht ist, so daß sie an ihn anliegt, empfängt noch keinen Druck; ein Druck auf sie hebt nothwendig

den Druck auf eine der früheren 3 Unterlagen auf, weil er nicht anders erfolgen kann, als durch ein, wenn auch noch so geringes, Erheben des Körpers.

Eine andere Frage ist die: wenn eine feste gerade Linie vom Gewicht Q auf drei oder mehrere in einer horizontalen Richtung befindliche Puncte, oder: wenn ein fester Körper vom Gewicht Q mit einer seiner begränzenden Ebenen auf 4 oder mehrere in einer Horizontalebene befindliche Puncte so aufgelegt wird, daß die erwähnten als Unterlagen dienende Puncte alle zu gleicher Zeit berührt werden, welche Druckvertheilung auf sie findet dann statt? Euler hat solche Fragen mit Hülfe der Voraussetzung beantwortet, daß bei einer festen unbiegsamen Ebene die Unterlagen in demselben Verhältniß, wie sie gedrückt werden, etwas nachgeben, und daß die tiefsten Puncte dieser Eindrücke noch in einerlei Ebene fallen, allein die Resultate seines Calcüls entsprechen offenbar der Sache nicht, vorzüglich, wenn nur von einer geraden Linie die Rede ist, und da seine Voraussetzung, wenigstens der erste Theil derselben, wohl vielleicht richtig sein kann, so möchte sich der Gedanke aufdrängen, daß überhaupt eine Linie nie mehr als 2 und ein Körper nie mehr als 3 Puncte der Unterlagen drückt, und es entstände dann nur die Frage: welche der Puncte werden gedrückt?

Der folgende §. enthält die Beantwortung bei Annahme der Richtigkeit von Eulers Voraussetzung in Beziehung auf eine feste Linie. Eine ähnliche Un-

tersuchung ließe sich für Körper mit mehr als 3 Unterlagen, auf welche der Körper so aufgelegt wird, daß er sie alle zugleich trifft, anstellen.

Anmerk. Eulers Voraussetzung ist wohl bei 3 Unterstützungspuncten unbestritten richtig. Bei 4 und mehreren aber wahrscheinlich nicht; denn die Einsenkung des 4ten Punctes bestimmt sich schon durch die, der 3 übrigen, scheint also von dem etwanigen Druck auf diesen 4ten Punct ganz unabhängig zu sein.

§. 123. Aufgabe. Eine gerade, feste unbiegsame Linie, von der Länge 2a, wird in ihrer Mitte lothrecht von einer Kraft Q angegriffen, und auf 3 feste in einer Horizontale liegende Puncte A, B, C, (*Fig.* 90) deren äußerste A, C um die Weite 2a von einander abstehen, so aufgelegt, daß sie diese 3 Puncte zugleich berührt. Wenn nun angenommen wird, daß Q nur 2 dieser 3 Puncte drückt, entweder A und B oder A und C, so soll bestimmt werden, welche beide einen Druck empfangen.

Auflösung. 1) Vertheilte sich der Druck Q blos auf A und C, so würde jeder dieser beiden Puncte A und C eine Einwirkung $= \frac{1}{2}$ Q erleiden (*Fig.* 91). Denkt man sich nun die Unterlagen sämmtlich weggenommen und in A und C die Gegenwirkungen $\frac{1}{2}$ Q angebracht, so bestände das Gleichgewicht, und es würde, wenn man nun Q um eine ganz geringe Größe Δ Q vermehrte, sowohl in A als in C eine Senkung, dem Uebergewicht $\frac{1}{2} \Delta$ Q gemäß, erfolgen müssen. Setzt man nun die einer Kraft = 1

zugehörige Senkung in einen unendlich kleinen Zeitraum, welchen t ausdrücken mag, = v; so ist die Senkung jeder der Puncte A und C $= \frac{1}{2} \triangle Q . v$. Es nähert sich also auch der Punct D oder Q in der Zeit t seinem Ziel (dem Mittelpunct der Erde) um die Größe $z = \frac{1}{2} \triangle Q v$, wenn Q um $\triangle Q$ vermehrt wird, und blos A und C eine Einwirkung erhielten, B aber keine.

2) Vertheilte sich der Druck blos auf A und B, so wären die Einwirkungen auf A und B also auch die fürs Gleichgewicht erfoderlichen Gegenwirkungen $= \frac{Q x}{a + x}$ und $\frac{Q a}{a + x}$, wie sie in *Fig.* 92 angedeutet sind. Vermehrte man nun Q um $\triangle Q$, so entstünde in A ein Uebergewicht $= \frac{x}{a + x} . \triangle Q$; in B eines $= \frac{a}{a + x} \triangle Q$ und es würde also während der Zeit t die Senkung in A

$= v . \frac{x}{a + x} \triangle Q$ und die in B $= v . \frac{a}{a + x} \triangle Q$

sein. Denkt man sich nun diese beiden Senkungen so gering, daß die Form, welche ihre beiden Endpuncte mit denen A und C bilden, als ein Trapez angesehen werden kann, und setzt die zugehörige Senkung des Punctes D, also die Annährung der Linie 2a an ihr Ziel, wenn Q um $\triangle Q$ vermehrt wird und blos A und B die Einwirkung empfangen, = y, so ergiebt sich y aus der Proportion

$$x : a + x = y - v \frac{a}{a+x} \triangle Q : v\left(\frac{x}{a+x} - \frac{a}{a+x}\right) \triangle Q$$

nemlich

$$y = \frac{a^2 + x^2}{(a + x)^2} v \triangle Q.$$

3) Nach §. 13. I. Bd. erfolgt also nun die Einwirkung auf A und C und keine auf B, wenn $z > y$ ist. Ist aber $z < y$, so erhalten A und B die Einwirkung, C aber keine.

Aus den für y und z gefundenen Werthen ergiebt sich aber

$$y : z = \frac{a^2 + x^2}{(a + x)^2} : \frac{1}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{y}{z} = 2 - \frac{4ax}{(a + x)^2}.$$

Es bleibt aber $\frac{4ax}{(a + x)^2}$ immer kleiner wie 1, so lange x kleiner wie a ist (und einen größeren Werth kann hier x nicht haben, weil die Länge der Linie nur $= 2a$ ist); also ist auch $\frac{y}{z}$ für jeden Werth von x zwischen Null und a größer wie 1; d. h.

$$y > z.$$

Es empfängt daher der nähere Punct B, nicht der entferntere C die 2te Einwirkung.

Ueber die Vertheilung des Drucks auf die Unterstützungspuncte einer elastischen Linie findet man vollständige Untersuchungen in Eytelweins Statik.

Siebenter Abschnitt.

Von der Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen, und der Kraftbestimmung bei in einander greifenden Räderwerk.

Des siebenten Abschnitts erste Abtheilung.

Von der Gestalt der Zähne, Kämme und Daumen.

---

§. 124. Erklärung. Wenn an der Peripherie eines Kreises, in der verbreiteten Ebene desselben, unter gleichen Abständen, Erhöhungen oder Hervorragungen angebracht werden, so heißt der entstehende (körperliche) Kreis mit seinen Hervorragungen ein Stirnrad. Die Hervorragungen selbst, heißen Zähne. Befinden sich die Hervorragungen in der Peripherie normal auf der Kreisebene, so heißen sie Kämme, und das Rad selbst, ein Kammrad. Sind in dem Mantel eines senkrechten Cylinders, unter gleichen Abständen, parallel mit der Achse, Vertiefungen eingearbeitet, in welche die Zähne oder Kämme eines andern Rades passen, so heißt der Cylinder ein Getrieb, Trilling, Drehling, zuweilen auch

Kumpf, und die Hervorragungen zwischen den Vertiefungen heißen Triebstöcke. Befinden sich die Triebstöcke, oder auch Zähne auf der einen Seitenwand eines Parallelepipedums, so heißt dasselbe eine verzahnte Stange. Hat die Stange nur einen Triebstock oder nur einen Zahn, durch welchen eine Erhebung der lothrechten Stange erfolgen kann, die man dann, zu gewissen Zwecken wieder frei fallen läßt, so heißt sie ein Stampfer, und die Vertiefung, wodurch der Triebstock sich bildet, heißt ein Schlitz; oder wenn ein Zahn angebracht ist, so heißt derselbe der Hebestock, und die Hervorragung eines Rades, welche in den Schlitz eingreift, oder unter den Hebestock angreift, um, wenn das Rad gedreht wird, den Stampfer zu erheben, heißt dann Hebedaumen. Die Peripherie eines Stirnrades, Kammrades oder auch Getriebes, worauf die gleiche Abtheilung abgetragen wird, heißt der Theilriß, und der Bogen desselben von der Mitte eines Zahns, Kamms oder Triebstocks, bis zur Mitte des nächstfolgenden, heißt die Theilung.

§. 125. Zusatz. Stirnräder, Kammräder, Getriebe u. s. w. sind die gewöhnlichen Hülfsmittel, eine hervorgebrachte Bewegung fortzupflanzen. Die vorzüglichsten Fälle sind:

1stens. Wenn die drehende Bewegung einer Welle, eine geradlinicht fortgehende einer Stange hervorbringen soll. Dieß wird bewirkt, wenn man die Stange verzahnt, und an der Welle ein Stirnrad

anbringt, dessen Zähne in die verzahnte Stange eingreifen. Hiedurch entsteht eine stetig fortgehende Bewegung der Stange. Soll sie nicht stetig erfolgen, sondern mit Unterbrechungen, so giebt man der Stange nur einen Schlitz oder einen Hebestock.

2tens. Wenn die drehende Bewegung einer Welle, eine drehende einer andern, welche mit ihr parallel liegt, hervorbringen soll. Dies geschieht, wenn man an der einen Welle ein Stirnrad und an der andern ein Getriebe, oder ebenfalls ein Stirnrad, oder auch zuweilen ein Kammrad so anbringt, daß beide Ränder in einander greifen.

3tens. Wenn die drehende Bewegung einer Welle, eine drehende einer andern, mit ihr nicht parallelen, erzeugen soll. Dies wird gewöhnlich durch ein Kammrad an der einen und ein Getriebe an der andern Welle hervorgebracht.

§. 126. Zusatz. Wenn man bei einem Stirnrad die Zähne auf der angreifenden Seite geradlinigt nach der Richtung des Halbmessers bilden wollte, und ließe dies Stirnrad in eine verzahnte Stange eingreifen (*Fig.* 93), deren Triebstöcke hier als bloße Linien angesehen werden sollen, so würde, wenn der Zahn in der Lage ab den Triebstock c ergreift, und ihn nun, wenn er bis a′b′ bei der Drehung des Rades gekommen wäre, nach c′ fortgeschoben hätte, der Bogen aa′, der Weg, der tangential in der Peripherie des Rades thätigen Kraft P und die zugehörige Tan-

gente cc' der gleichzeitige Weg des in der Stange nach der Richtung $c'c$ thätigen Widerstandes Q sein, und es würde sich also fürs Gleichgewicht

$$P : Q = cc' : aa'$$

verhalten müssen. Weil aber nun das Verhältniß der Tangente zum Bogen für jeden Winkel ein anders ist, so müßte also auch, wenn in jeder Lage des Zahns während des Angreifens an den Triebstock das Gleichgewicht zwischen Kraft und Widerstand bestehen sollte, erstere etweder immer wachsen, oder letzterer fortwährend abnehmen. Soll also für jede Lage des Zahns das Gleichgewicht zwischen einer unveränderlichen Kraft und einem unveränderlichen eben so großen Widerstand bestehen, so muß die Form der angreifenden Seite des Zahns so beschaffen sein, daß für jede Stelle die Wege der Kraft und Last gleiche Größe haben. Eine ähnliche Bewandniß hat es, wenn ein Stirn- oder Kammrad in ein Getriebe eingreift. In den folgenden §. soll nun, für die 3 im vorigen §. erwähnten vorzüglichsten Fälle, die jedesmalige nothwendige Form des Zahns oder Kamms bestimmt, und dann auch mit Rücksicht auf die Reibung zwischen Zahn und Stock, die nöthige Kraft angegeben werden, welche, wenn sie um das Geringste vermehrt würde, Bewegung erzeugte. Uebrigens ist durchaus der Triebstock nur als eine Linie behandelt, indem seine Dicke nur einen geringen Einfluß hat, der sich mehr in den Formeln als in der Ausübung zeigt. Zu bemerken ist noch, daß es beim Ineinander-

greifen der Räder nicht nothwendig ist, daß mehrere Zähne oder Kämme zugleich auf Triebstöcke einwirken; es ist vollkommen hinreichend, wenn immer nur einer angreift, jedoch ist es dann, um Stoß zu vermeiden, höchst nothwendig, daß in dem Augenblick, in welchen ein Zahn seinen Stock verläßt, der nächstfolgende Zahn auch den nächstfolgenden Stock schon berührt. Diese Einrichtung ist in dem folgenden §. angenommen.

§. 127. Aufgabe. Ein Stirnrad greift in eine verzahnte Stange; man soll die Form der angreifenden Seite des Zahns, der Bedingung §. 126 gemäß, bestimmen.

Auflösung. Stellt ab (*Fig.* 94) einen Zahn in dem Augenblick vor, in welchen er seinen Triebstock c verläßt, und gf den nächstfolgenden in dem Augenblick, wo er den nächsten Triebstock d ergreift, so muß die Curve ab oder gf so beschaffen sein, daß nicht nur der Bogen ag gleich dem Tangentenstück dc oder gb, sondern daß auch für jeden Punct des Weges, welchen der Triebstock c während dem er angegriffen wird, durchläuft, der Weg dieses Triebstocks eben so groß ist, als der gleichzeitige der Peripherie des Stirnrades. Dieser Forderung entspricht aber der cycloidische Bogen, welchen der Punct a beschreibt, wenn man den Kreis AB, die Linie DF in g berühren läßt, und dann von d gegen D so lange fortwälzt, bis sich a in der Tangente DF befindet, welche Stelle hier also b andeutet.

§. 128. Aufgabe. Die Größe der Hervorra-

gung, $bk = x$ (*Fig.* 94) jedes Zahns, über den Theilriß, wenn die Theilung $ag = cd = t$ und die Anzahl Zähne $= n$ des Stirnrades gegeben sind, der Bedingungung gemäß, zu bestimmen, daß der Zahn seinen Triebstock nicht eher verläßt, bis der folgende den nächsten Zahn ergriffen hat, d. h. also, die kleinste Größe der Hervorragung anzugeben.

Auflösung. Den Halbmesser $ah = gh$ vom Theilriß des Stirnrades bezeichne r; den zum Halbmesser $= 1$ gehörigen Bogen zu t drücke α aus, so ist $bd = ag = r.\alpha$; folglich

$$bh = \sqrt{gh^2 + db^2} = \sqrt{r^2 + r^2\alpha^2} = r.\sqrt{1 + \alpha^2}$$

und weil $hk = r$ ist, so ergiebt sich also

$$bk = x = r.\sqrt{1 + \alpha^2} - r$$
$$= r.(-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}).$$

Es ist aber die Peripherie des Rades sowohl $= n.t$ als auch $= 2r\pi$; folglich $r = \frac{n.t}{2\pi}$; ferner ist $n\alpha = 2\pi$; daher $\alpha = \frac{2\pi}{n}$; daher hat man

$$x = \frac{nt}{2\pi}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}\right]$$

Ist z. B. $n = 44$; $t = 4\frac{1}{2}''$; so entsteht, wenn man $\pi = \frac{22}{7}$ als hinreichend genau annimmt, $x = 0,32''$ beinahe 4 Linien.

Anmerk. Um für den Triebstock Platz zu erhalten, erhält der Zahn nach unten eine Verlängerung ai, so daß also durch i die eigentliche Peripherie des Rades zu denken ist. Der Theilriß AB liegt außerhalb derselben.

§. 129. Aufgabe. Bestimmung der erforderlichen Kraft P fürs Gleichgewicht während der Bewegung, mit Rücksicht auf die Reibung zwischen dem Zahn des Stirnrades und dem Triebstock der verzahnten Stange.

Auflösung. Der Widerstand Q (*Fig.* 94) womit der Triebstock gegenwirkt, erzeugt eine Reibung R und der Weg von R ist = ab, in eben der Zeit, in welcher P den Weg ga und Q den gleichgroßen cd = ga durchläuft. Man hat also

$$P.\,ga - Q.\,ga - R.\,ab = 0;$$

also
$$P = Q + R.\,\frac{ab}{ga}.$$

Es ist aber R gleich μ, multiplirt mit dem Normaldruck von Q auf den Zahn. Dieser Normaldruck ist aber veränderlich, und der Natur der Cycloide gemäß, ist er im ersten Augenblick, also in d

$$= Q\ \mathrm{Cos.}\ agb = Q\ \mathrm{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\alpha$$

und im letzten Augenblick ist er am größten, nemlich = Q. Für den Augenblick des größten Widerstandes ist daher
$$R = \mu Q;$$
und nimmt man diesen als unveränderlich an, wobei man am sichersten geht, so hat man also

$$P = Q + \mu Q.\,\frac{a.b}{ga}.$$

Es ist aber ag = $r\alpha$ und der cyloidische Bogen $ab = 2.\,(gw - aw) = 2.\,(2r - 2r\ \mathrm{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\alpha) = 4r\,(1 - \mathrm{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\,\alpha) = 4r.\ 2.\ (\mathrm{Sin.}\ \tfrac{1}{4}\,\alpha)^2$, oder, weil für so kleine Bogen, wie $\frac{1}{4}\,\alpha$, der Sinus

mit dem Bogen als gleich anzunehmen ist, so hat man

$$ab = 8 \, . \, r \, . \, \tfrac{1}{16} \alpha^2 = \tfrac{1}{2} r \, . \, \alpha^2;$$

folglich $\frac{ab}{ga} = \frac{1}{2} \alpha$; daher

$$P = Q + \mu Q \, . \, \tfrac{1}{2} \alpha$$

oder, weil $\alpha = \frac{t}{r} = \frac{2\pi}{n}$ ist,

$$P = \left(1 + \frac{\mu t}{2r}\right) Q \text{ oder}$$

$$P = \left(1 + \frac{\mu \pi}{n}\right) . Q$$

Ist z. B. $n = 44$; $\mu = \frac{1}{3}$; so entsteht

$$P = (1 + \tfrac{1}{42}) Q = 1{,}024 \, Q.$$

Anmerk. Wenn man die Curve ab nicht als Cycloide, sondern (wie es gewöhnlich bei Stampfwerken geschieht) als Kreis-Evolvente construirt, indem man einen Faden in g befestigt, bis a ihn an die Peripherie anlegt, und dann denselben unter steter Anspannung allmählig in die Lage db der Tangente bringt, wobei a die Evolvente ab beschreibt, so wird ebenfalls die Bedingung erfüllt, daß $dc = ga$ wird, allein der Normaldruck, welcher Reibung hervorbringt, ist dann in jedem Augenblick $= Q$; die Reibung also wirklich immer μQ, nicht wie bei der Cycloide blos im nachtheiligsten letzten Augenblick.

§. 130. Aufgabe. Ein Stirnrad *(Fig 95)* greift in ein Getriebe. Die Form des Zahns nach der angreifenden Seite, der Bedingung §. 126 gemäß, zu bestimmen.

Auflösung. Ist bg der Zahn an der Stelle f in der Centrale ih, wo er den Triebstock f zuerst

ergrift, und cd seine Lage in dem Augenblick, in welchen er den nun bis d fortgeschobenen Triebstock verläßt, so muß die Curve bg = cd von der Art sein, daß fd oder bk = bc wird, und daß zugleich für jede andere Stelle des Triebstocks zwischen f und d die durchlaufenen Bogen auf beiden Peripherien gleiche Größe haben. Dieser Bedingung entspricht aber der epicycloidische Bogen, welchen der Punct d beschreibt, wenn man die Peripherie des Getriebes die des Stirnrades in f berühren läßt, und nun erstere auf letztere herunter wälzt, bis d in der unteren angekommen ist. Hiedurch bestimmt sich der Punct c und die Curve dc, der Bedingung gemäß, daß beide Räder, wenn Bewegung entsteht, sich gleichförmig bewegen, und gleiche Wege in jeder noch so kleinen oder großen Zeit durchlaufen.

§. 131. **Aufgabe.** Die Größe der erforderlichen Hervorragung dp = x (*Fig.* 95) jedes Zahns über die Peripherie des Theilrisses, wenn die Theilung fd = bk = bc = t; die Anzahl Stöcke = m des Getriebes und die Anzahl Zähne = n des Stirnrades gegeben sind, der Bedingung gemäß, zu bestimmen, daß der Zahn seinen Triebstock nicht eher verläßt, bis der folgende den nächsten Triebstock ergriffen hat.

Auflösung. Fällt man aus k eine Normale kv auf die Centrale hi und setzt den Halbmesser des Stirnrades = a; den des Getriebes = r; so ist

$$hd^2 = dv^2 + vh^2.$$

Es ist aber

$$hd = a + x;\ dv = r\ \mathrm{Sin.}\ \beta$$

$$vh = ih - iv = a + r - r\ \mathrm{Cos.}\ \beta;\ \text{also}$$

$$(a+x)^2 = r^2\ \mathrm{Sin.}\ \beta^2 + (a + r - r\ \mathrm{Cos.}\ \beta)^2;$$

$$= r^2 + (a+r)^2 - 2(a+r)\ r\ \mathrm{Cos.}\ \beta$$

$$= 2r^2 + 2ar + a^2 - 2(a+r)r.(1 - 2\,\mathrm{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\beta^2)$$

$$= a^2 + 4\,(a + r)\ r\ \mathrm{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Insofern aber nun $\frac{1}{2}\beta$ immer nur ein kleiner Bogen ist, so kann man $\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta$ setzen, und es entsteht

$$(a + x)^2 = a^2 + (a + r)\ r.\ \beta^2.$$

Es ist aber

$$2a\pi = nt;\ \text{also}\ a = \frac{nt}{2\pi};$$

$$2r\pi = mt;\ \text{also}\ r = \frac{mt}{2\pi};$$

$$m\beta = 2\pi;\ \text{also}\ \beta = \frac{2\pi}{m};$$

folglich

$$\left(\frac{nt}{2\pi} + x\right)^2 = \frac{n^2t^2}{4\pi^2} + \frac{n+m}{2\pi}\,t.\ \frac{mt}{2\pi}.\ \frac{4\pi^2}{m^2}$$

und hieraus

$$x = \left[-\frac{n}{2\pi} + \sqrt{\left(\frac{n}{2\pi}\right)^2 + \frac{n+m}{m}}\,\right].\ t$$

Ist β so groß, daß man $\frac{1}{2}\beta$ nicht wohl mit $\mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2}\beta$ verwechseln darf, so entsteht

$$x = \frac{t}{2\pi}\left[-n + \sqrt{n^2 + 4m(n+m)\left(\mathrm{Sin.}\ \frac{\pi}{m}\right)^2}\,\right]$$

Beispiel. Es sei $n = 32;\ m = 7;\ t = 4''$; so entsteht näherungsweise

$$x = 2{,}08'';$$

nach der genauen Formel aber

$$x = 1{,}94''.$$

Ist $n = 72$; $m = 28$; $t = 4''$; so wird

$$x = 0{,}62 = 7\tfrac{1}{2} \text{ Linie.}$$

§. 132. Aufgabe. Die nöthige Kraft P am Zahn des Stirnrades fürs Gleichgewicht während der Bewegung mit dem Widerstand Q des Triebstocks im Getriebe und der entstehenden Reibung zwischen beiden zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man den Reibungswiderstand $= R$; so ist, wie §. 129,

$$P.\,bc = Q.\,fd + R.\,cd;$$ (*Fig.* 95); also

$$P = Q + R.\,\frac{cd}{bc}.$$

Es ist aber im Punct d

$$R = \mu Q \,\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\beta$$ und im Punct f

$$'R = \mu Q;$$

also im Augenblick des größen Widerstandes

$$R = \mu Q;$$ ferner

$$bc = a\alpha = r\beta = t$$

und den Eigenschaften der Epicycloide gemäß

$$cd = \frac{4r\,(a+r)}{a}\,(1 - \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$= \frac{8r\,(a+r)}{a}.\,(\text{Sin.}\,\tfrac{1}{4}\beta)^2$$

oder $\text{Sin.}\,\tfrac{1}{4}\beta = \tfrac{1}{4}\beta$ genommen,

$$cd = \frac{r\,(a+r)}{2a}\,\beta^2$$

oder

oder auch, weil $\beta = \frac{2\pi}{m}$ ist,

$$cd = \frac{2r(a+r)}{a} \cdot \frac{\pi^2}{m^2}$$

$$= \frac{n+m}{u} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot t$$

folglich $\frac{cd}{bc} = \frac{n+m}{n} \cdot \frac{\pi}{m}$; also

$$P = \left(1 + \frac{\mu t}{2a} \cdot \frac{a+r}{r}\right) Q \text{ oder}$$

$$P = \left(1 + \frac{\mu \pi}{n} \cdot \frac{n+m}{m}\right) Q.$$

Beispiel. Es sei $n = 44$; $\mu = \frac{1}{8}$; $m = 9$; so entsteht

$$P = \left(1 + \frac{53}{378}\right) Q = 1{,}14\, Q.$$

§. 133. Aufgabe. Ein Kammrad greift in ein Getriebe; beider Räder Ebenen bilden den Neigungswinkel δ; man soll die Form des Kamms auf der angreifenden Seite bestimmen.

Auflösung. Durch eine ähnliche Betrachtung, wie in §. 127 und 130, ergiebt sich bald, daß die Bedingung §. 126 erfüllt wird, wenn der Kamm auf der angreifenden Seite diejenige sphärisch-epicycloidische Krümmung erhält, welche der Endpunct einer Theilung des Getriebes dann beschreibt, wenn man die Kreisebene desselben, die des Kammrades unter dem Neigungswinkel δ im andern Endpunct der Theilung berühren läßt, und dann erstere auf der Periphherie der letzteren unter dem bleibenden Neigungswinkel δ beider Ebenen, so lange fortrollt, bis der er-

stere Endpunct der Theilung in der Peripherie des Kammrades angekommen ist.

§. 134. Aufgabe. Diejenige normale Höhe x, welche der Endpunct des Kamms, eines Kammrades, welches in ein Getriebe greift, über der Ebene des Kammrades mindestens haben muß, wenn der Kamm seinen Triebstock nicht eher verlassen soll, als bis der folgende Kamm den nächsten Triebstock ergriffen hat, zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet δ den Neigungswinkel der Ebenen beider Räder gegen einander; r den Halbmesser des Getriebes; t die Theilung; β den mit t concentrischen, zu demselben Mittelpuncts-Winkel gehörigen Bogen für den Halbmesser 1 in der Ebene des Getriebes, so würde, wenn δ ein rechter Winkel ist,

$$x = r \,\text{Sin. v}\, \beta = r\,(1 - \text{Cos.}\, \beta)$$
$$= 2r\,(\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\beta)^2 \quad \text{sein.}$$

Für jeden Werth von δ hat man also

$$x = 2r\,(\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\beta)^2 . \,\text{Sin.}\, \delta.$$

Ist β nur klein, so kann man $\frac{1}{2}\beta$ für Sin. $\frac{1}{2}\beta$ schreiben, und es entsteht

$$x = \tfrac{1}{2} r . \beta^2 \,\text{Sin.}\, \delta,$$

oder, wenn das Getriebe m Stöcke hat, so daß $\beta = \frac{2\pi}{m}$; $r = \frac{mt}{2\pi}$ ist; so entsteht genau

$$x = \frac{mt}{\pi} . \left(\text{Sin.}\, \frac{\pi}{m}\right)^2 \text{Sin.}\, \delta;$$

und näherungsweise

$$x = \frac{\pi t}{m} \,\text{Sin.}\, \delta.$$

Ist z. B. $t = 4''$; $m = 9$; $\delta = 90°$; so wird $x = 1,4''$ nach der Näherungsformel; nach der genauen Formel aber $x = 1,34''$.

§. 135. Aufgabe. Die nöthige Kraft P am Kamm des Kammrades fürs Gleichgewicht während der Bewegung mit dem Widerstand Q am Triebstock des Getriebes und der entstehenden Reibung zwischen beiden, zu bestimmen.

Auflösung. Nimmt man für den Reibungswiderstand seinen größten Werth μQ und betrachtet den spährisch-epicycloidischen Bogen, weil seine Längen-Bestimmung durch eine transcendente Formel erfolgt, als blos epicycloidisch, da die Verschiedenheit, wegen Kürze des Bogens, nur sehr gering ausfallen kann, und außerdem der Werth für μ hier nur beiläufig zu wählen ist, indem die Reibung eine vermischte gleitende und Walzenreibung ist, so kann man, wenn n die Anzahl Kämme des Kammrades und m die Anzahl Stöcke des Getriebes ausdrückt, ganz nach §. 132

$$P = \left(1 + \frac{\mu \pi}{n} \cdot \frac{n + m}{m}\right) \cdot Q$$

oder $$P = \left(1 + \frac{\mu t}{2 a} \cdot \frac{a + r}{r}\right) Q$$ setzen.

§. 136. Aufgabe. Bei einem Stampfwerk die nöthige Kraft P im Theilriß der Daumenwelle fürs Gleichgewicht während der Bewegung, oder, was dasselbe sagt: P so zu bestimmen, daß die geringste Vermehrung des gefundenen P eine Erhebung des Stampfers bewirkt, mit Rücksicht auf die Reibungen an

den Scheidelatten und zwischen Hebestock und Hebedaumen.

Auflösung. Ist die Daumenwelle n hübig, so ist, wenn t = ac (*Fig.* 96) die Theilung, cf = r den mechanischen Halbmesser der Daumenwelle, also den des Theilrisses und α den Bogen zu t für den Halbmesser = 1 am Mittelpunct bezeichnet, cd als Cycloide oder auch als Kreis-Evolvente betrachtet,

$$ad = ac = t = r.\,\alpha = r.\,\frac{2\pi}{n}.$$

Ist nun Q das Gewicht des Stampfers; x die aus P entspringende Normalpressung gegen die linke obere, und y die gegen die rechte untere Scheidelatte, so widersteht der Erhebung des Stampfers

$$Q + \mu\,(x + y)$$

und zugleich ist auch $Q + \mu\,(x + y)$ der Druck, womit der Hebestock, dessen Länge = b sein mag, dem Hebedaumen entgegenwirkt. Nimmt man diesen in jeden Augenblick während der Erhebung als normal auf das Element der Curve an, wie es, wenn cd eine Kreis-Evolvente ist, auch wirklich der Fall sein würde, so ist der Reibungswiderstand zwischen Hebestock und Hebedaumen

$$= \mu\,[Q + \mu\,(x + x)]$$

und sein Weg ist

$$= cd = 8r\left(\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{4}\right)^2$$

(siehe §. 129. cd als Cycloide angenommen) in derselben Zeit, in welcher P den Weg ac = rα und

$Q + \mu\,(x + y)$ den $ad = r\alpha$ zurücklegt. Man hat also

$$P.\,r\alpha - [Q + \mu(x + y)]\,r\alpha$$
$$-\mu[Q + \mu(x + y)]\,8r\left(\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{4}\right)^2 = 0.$$

Um x und y zu bestimmen, denke man sich zuvörderst nur denjenigen Theil der Kraft, welcher ohne Rücksicht auf Reibung erforderlich wäre; ist dieser $= P'$; so sind die 4 Kräfte P'; Q; x und y, wie sie *Fig.* 97 darstellt, unter einander im Gleichgewicht, und also

1) $P' = Q$

2) $x = y$

3) $xh = Qb$; in Beziehung auf f genommen.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$x = y = \frac{Qb}{h};\ \text{folglich}$$
$$x + y = \frac{2Qb}{h}$$

und also

$$P - \left(Q + \frac{2b\mu Q}{h}\right) - \mu\left(Q + \frac{2b\mu Q}{h}\right) \cdot \frac{8\left(\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{4}\right)^2}{\alpha} = 0$$

daher, weil $\frac{\alpha}{4} = \frac{\pi}{2n}$ ist,

$$\text{(I).}\ P = \frac{h + 2\mu b}{h} \cdot \left[1 + \mu\,\frac{4n}{\pi}\left(\text{Sin}\,\frac{\pi}{2n}\right)^2\right] \cdot Q$$

oder auch, noch mehr näherungsweise, wenn n groß, also α klein ist, so daß man $\frac{\pi}{2n}$ statt $\text{Sin.}\,\frac{\pi}{2n}$ schreiben kann

$$\text{(II). } P = \frac{h + 2\mu b}{h}\left(1 + \mu . \frac{\pi}{n}\right) . Q$$

Aus diesen Formeln (I) und (II) ersieht man, daß es vortheilhaft ist, b so klein wie möglich, d. h. = o zu nehmen, oder geschlitzte Stampfer anzuordnen. Für solche ist dann vollständiger

$$\text{(III). } P = \left[1 + \mu \frac{4n}{\pi} . \left(\text{Sin. } \frac{\pi}{2n}\right)^2\right] Q$$

und beinahe

$$\text{(IV). } P = \left(1 + \mu . \frac{\pi}{n}\right) Q,$$

nemlich für cycloidisch gekrümmte Hebedaumen. Ist aber cd eine Kreis-Evolvente, so ist nicht nur die Normalpressung immer

$$= Q + \mu (x + y),$$

da sie bei der Cycloide blos im nachtheiligsten Augenblick diese Größe hat, sondern es ist auch $cd = \frac{1}{2} r \alpha^2$, da bei der Cycloide cd nur $= 8 r \left(\text{Sin. } \frac{\alpha}{4}\right)^2$ ist, welcher Werth nur dann mit dem $\frac{1}{2} r \alpha^2$ für gleichgroß anzunehmen ist, wenn man α sehr klein annimmt. Die Formeln (II) und (IV) sind also, wenn die Krümmung eine Kreis-Evolvente ist, vollständig, für die cycloidische Krümmung liefern sie aber in doppelter Hinsicht ein etwas zu großes Resultat. Es erhellet hieraus, daß die Cycloide hier der Evolvente vorzuziehen ist.

Beispiel. Ist $b = o$; $n = 4$; $\mu = \frac{2}{7}$; so erhält man für die Cycloide, aber etwas zu groß in Beziehung auf den Mittelwerth,

$$P = [1 + \tfrac{2}{7} \cdot 16 \cdot \tfrac{7}{22} (\text{Sin. } 22^\circ\, 30')^2]\, Q$$
$$= 1{,}213\, Q$$

und für die Kreis-Evolvente vollkommen

$$P = \left(1 + \frac{2}{7} \cdot \frac{22}{7} : 4\right) Q$$
$$= 1{,}224\, Q.$$

Für die Kreis-Evolvente ist also der mehrere Kraft-Aufwand im Vergleich gegen die Cycloide, in diesem Beispiel, mindestens = 0,011 Q.

Des siebenten Abschnitts zweite Abtheilung.

Von der Kraftbestimmung bei in einander greifenden Räderwerk fürs Gleichgewicht während der Bewegung.

---

§. 137. Aufgabe. An der Welle eines Laufrades befindet sich ein Stirnrad, welches in ein Getriebe greift, dessen Achse mit der Achse des Laufrades parallel läuft und mit ihr in eine Horizontalebene fällt. An der Peripherie der Welle des Getriebes hängt an einem Seil lothrecht herab eine Last Q, in der Peripherie des Laufrades aber ist an irgend einem Punct k (*Fig.* 98) derselben ein Gewicht = P aufgelegt und befestigt. Man soll P so bestimmen, daß die geringste Vergrößerung von P eine augenblickliche Erhebung von Q zur Folge haben würde.

Auflösung. Es bezeichne R den Halbmesser des Laufrades, r den des Stirnrades, ϱ den der Zapfen der Welle des Laufrades, φ den Bogen (für den Halbmesser = 1) welchen der Halbmesser in k mit der Verticale bildet, also zugleich die Neigung des Kreis-Elements in k gegen den Horizont; A den Halbmesser des Getriebes, a den der Welle desselben, und α den der Zapfen der Welle; W das Gewicht des Laufrades, nebst Stirnrad, Welle desselben und Zapfen; V das des Getriebes nebst Zubehör, und x die Gewalt, womit der Triebstock dem Zahn widersteht; so ist der Druck auf die Zapfen der Welle des Getriebes

$$= V + Q - x;$$

folglich die Zapfenreibung

$$= \mu' (V + Q - x)$$

und ihr Widerstand reducirt auf die Peripherie des Getriebes

$$= \frac{\alpha}{A} \mu' (V + Q - x).$$

Wenn nun ferner δ den Halbmesser des Seils ausdrückt, so ist das Moment von Q =

$$(a + \tfrac{1}{2} \delta^2) Q;$$

und dieser Widerstand eben dahin reducirt, also

$$= \frac{(a + \frac{1}{2} \delta^2) Q}{A};$$

man hat daher

$$x = \frac{\alpha}{A} \mu' (V + Q - x) + \frac{a + \frac{1}{2} \delta^2}{A} Q$$

und hieraus

$$x = \frac{(a + \frac{1}{2}\delta^2 + \alpha\mu')\,Q + \alpha\mu'\,V}{A + \alpha\mu'}$$

folglich nach §. 132 die erforderliche Gewalt im Zahn des Stirnrades

$$= \left(1 + \frac{\mu r}{2t} \cdot \frac{r + A}{A}\right) \cdot x$$

wo t die Theilung bezeichnet; und wenn man diese auf den Hebelsarm von P, welcher = R Sin. φ ist, reducirt, so entsteht

$$\frac{r}{R \text{ Sin. } \varphi} \cdot \left(1 + \frac{\mu t}{2r} \cdot \frac{r + A}{A}\right) x.$$

Weil nun ferner der Normaldruck auf die Zapfen des Laufrades = P + W + x ist, so wird der daraus entspringende Reibungswiderstand, eben dahin reducirt,

$$= \frac{\varrho\mu'(P + W + x)}{R \text{ Sin. } \varphi},$$

und man hat demnach

$$P = \frac{r}{R \text{ Sin. } \varphi}\left(1 + \frac{\mu t}{2r} \cdot \frac{r + A}{A}\right) x + \frac{\varrho\mu'(P + W + x)}{R \text{ Sin. } \varphi}$$

folglich

$$P = \frac{[r + \frac{1}{2}\mu t\,\frac{r + A}{A} + \varrho\mu']\,x + \varrho\mu' W}{R \text{ Sin. } \varphi - \varrho\mu'}$$

worinnen x den oben hergeleiteten Werth hat.

Fänden gar keine Nebenhindernisse statt, so wäre

$$P = \frac{a r}{A R \text{ Sin. } \varphi} \cdot Q$$

Beispiel. Es sei $R = 18'$; Sin. $\varphi = \frac{1}{3}$; $r = 4'$; $\varrho = 1\frac{1}{2}''$; $t = 5''$; $A = 3'$; $a = 1\frac{1}{2}'$; $\alpha = 1\frac{1}{2}''$; $\mu = \frac{1}{5}$; $\mu' = \frac{1}{8}$; $V = 800$ ℔;

$W = 3000$ ℔; $\delta = \frac{1}{4}''$; $Q = 1200$ ℔; so findet man, wenn keine Nebenhindernisse statt fänden,

$$P = 400 \text{ ℔},$$

und mit Berücksichtigung derselben

$$P = 431,6 \text{ ℔}.$$

Anmerk. Man nennt so ein Rad ein Laufrad, weil ein lebendes Geschöpf die Stelle von P vertritt, und dasselbe durch äußern Antrieb immer an der Stelle k, d. h. unter der Neigung φ erhalten wird, wenn auch das Rad sich unter demselben weg bewegt, was nothwendig erfolgen muß, wenn das Thier das berechnete Gewicht hat, und anfänglich zu einer stärkern Neigung, als φ ausdrückt, hinaufgetrieben wird.

§. 138. Aufgabe. Eine kreisförmige Scheibe, (Trettscheibe) ist unter einem Winkel δ gegen den Horizont geneigt (*Fig.* 99). An der auf ihr normalen Welle befindet sich ein conisches Getriebe, durch welches ein ebenfalls conisches Kammrad ergriffen wird, an dessen horizontaler Welle an einem Seil eine Last Q herabhängt. Auf der Scheibe sei ab der Durchmesser, welcher zugleich in der Verticalebene durch die Achse der Welle sich befindet, und an derjenigen Stelle k der Peripherie der Scheibe, in welcher der Halbmesser kf mit ba den Winkel φ bildet, sei ein Gewicht P befestigt; es soll dessen Größe unter eben der Bedingung, wie §. 137, bestimmt werden.

Auflösung. Die Bezeichnung ist in der Figur angedeutet, und eben so wie die in der vorigen Aufgabe. Unter y verstehe man außerdem die Gewalt,

womit der Triebstock den Zahn ergreift, und unter x den Widerstand des Zahns, so erleiden die Zapfen der Kammrads-Welle eine Normalpressung $= Q + V$, und eine horizontale $= x$, und es ist also der Mitteldruck auf beide Zapfen $= \sqrt{(Q + V)^2 + x^2}$; die Gleichung für die Kräfte an dieser Achse ist daher

$$xA = Q\left(a + \frac{\delta^2}{2}\right) + \alpha . \mu' \sqrt{(Q + V)^2 + x^2}$$

Wird bei Bestimmung der Reibung die Horizontalpressung x unberücksichtigt gelassen, so ist

$$xA = Q\left(a + \frac{\delta^2}{2}\right) + \alpha \mu' (Q + V)$$

also $x = \dfrac{Q . \left(a + \frac{\delta^2}{2}\right) + \alpha \mu' (Q + V)}{A} = N$

und setzt man, um eine weitläuftige und doch nutzlose Rechnung zu vermeiden, diesen Näherungswerth in die vollständige Gleichung für x unters Wurzelzeichen, so erhält man

$$x = \frac{Q\left(a + \frac{\delta^2}{2}\right) + \alpha \mu' \sqrt{(Q + V)^2 + N^2}}{A}$$

folglich nach §. 132

$$y = \left(1 + \frac{\mu r}{2A} . \frac{A + r}{r}\right) . x$$

Nun ist ferner die Normalpressung nach der Richtung der Achse auf die Grundfläche des untern Zapfens der geneigten Welle $= (W + P) \text{ Cos. } \delta$ und das Moment der daraus entspringenden Reibung nach §. 84

$$= \tfrac{2}{3} \varrho . \mu (W + P) \text{ Cos. } \delta;$$

dann ist die Normalpressung auf den Umfang beider Zapfen dieser Welle nach der Richtung ab =

$$(W + P) \text{ Sin. } \delta$$

und nach einer dadurch senkrechten Richtung = x; daher der mittlere Druck

$$= \sqrt{x^2 + (W + P)^2 \text{ Sin. } \delta^2}$$

und das Moment der daraus entstehenden Reibung

$$= \varrho \cdot \mu' \cdot \sqrt{\alpha^2 + (W + P)^2 \text{ Sin. } \delta^2} .$$

Da nun endlich aus dem Gewicht P das abgleitende Bestreben oder die Tangentialkraft = P Sin. δ entspringt, und diese den Hebelsarm R Sin. φ hat, so entspringt also die Gleichung

$$P R \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi = y \cdot r + \tfrac{2}{3} \varrho \mu (W + P) \text{ Cos. } \delta$$
$$+ \varrho \mu' \sqrt{x^2 + (W + P)^2 \text{ Sin. } \delta^2} ,$$

woraus, wenn für x und y die schon gefundenen Werthe gesetzt werden, P zu entwickeln ist.

Der Kürze wegen kann man auch hier für P unterm Wurzelzeichen den Näherungswerth

$$\frac{r y}{R \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi}$$

oder den noch genaueren

$$\frac{r y + \tfrac{2}{3} \varrho \mu W \text{ Cos. } \delta}{R \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi - \tfrac{2}{3} \varrho \mu \text{ Cos. } \delta} \text{ setzen.}$$

Aus der Größe

$$P R \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \delta ,$$

welche das Drehungs-Moment von P in Beziehung auf die geneigte Wellachse ausdrückt, ersieht man, daß

dasselbe, blos als abhängig von φ betrachtet, für $\varphi = 90°$ am größten ist.

So wie beim Laufrad, wird auch bei der Trettscheibe ein lebendes Geschöpf, vom Gewicht P, gebraucht.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist für $\varphi = 90°$

$$P = \frac{a\,r}{A\,R\,\text{Sin.}\,\delta} \cdot Q$$

Beispiel. Es sei $R = 12'$; $\text{Sin.}\,\delta = \frac{5}{13}$; also $\text{Cos.}\,\delta = \frac{12}{13}$; $W = 2400$ ℔; $r = 1\frac{1}{2}'$; $\varsigma = \frac{1}{2}''$; $A = 4'$; $t = 4''$; $V = 1000$ ℔; $a = 1\frac{1}{4}'$; $\alpha = 2''$; $Q = 4000$ ℔; $\delta = 1''$; $\mu = \frac{1}{5}$; $\mu' = \frac{1}{8}$; $\varphi = 90°$; so erhält man

$$N = 1317{,}7$$
$$x = 1318{,}5$$
$$y = 1358{,}8$$

und als Näherungswerth für

P die Zahl 444,8.

Endlich hinreichend genau

$$P = 446{,}7.$$

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ergiebt sich

$$P = 406{,}2.$$

§. 139. Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene (*Fig.* 100) liegt eine Last Q; durch ein Seil, welches parallel mit der schiefen Ebene läuft, oben über eine Rolle gelegt, und dann horizontal weiter bis zu der Welle eines Stirnrades geführt ist, welches durch ein

Getriebe ergriffen wird, in dessen Welle ein horizontaler Hebel von der Länge C steckt, auf dessen Endpunct lothrecht eine Gewalt P wirkt, soll Q bei der geringsten Vergrößerung von P erhoben werden. P dieser Bedingung gemäß zu bestimmen.

Auflösung. Bei der in der Figur angedeuteten Bezeichnung ergeben sich folgende 5 Gleichungen:

1) $x = \frac{h + \mu g}{l} Q$ (§. 106.)

2) $y \cdot r = x \cdot (r + \tfrac{1}{2}\delta^2) +$
$\mu' \varrho \sqrt{\left(y - \frac{g}{l} x\right)^2 + \left(G + \frac{h}{l} x\right)^2}$

3) $zB = y(b + \tfrac{1}{2}\delta^2) + \mu' \beta \cdot \sqrt{(z + y)^2 + W^2}$

4) $u = \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \mu \cdot t \frac{B + c}{B \cdot c}\right] z$

5) $P \cdot C = u \cdot c + \mu' \gamma \cdot \sqrt{(V + P)^2 + z^2}$

aus welchen die 5 unbekannten Größen x; y; z; u; P entwickelt werden können. Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse entsteht

$$P = \frac{h\ b\ c}{l\ B\ C} Q.$$

Beispiel. Es sei $h = 5'$; $g = 12'$; also $l = 13'$; ferner $\delta = 1''$; $r = 2''$; $\varrho = \frac{3}{4}''$; $G = 50$ ℔; $b = 1'$; $B = 5'$; $\beta = 1\frac{1}{2}''$; $W = 1000$ ℔; $c = \frac{3}{4}'$; $C = 15''$; $\gamma = 1''$; $V = 400$ ℔; $\mu = \frac{1}{4}$; $\mu' = \frac{1}{6}$; $Q = 650$ ℔; $t = 4''$; so erhält man

$$x = 400$$
$$y = 515{,}1$$
$$z = 112{,}2$$
$$u = 119{,}3$$
$$P = 77 \text{ ℔}.$$

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ergiebt sich

$$P = 30 \text{ ℔}.$$

Achter Abschnitt.

Von der Festigkeit der Materialien.

---

§. 140. Erklärung. Der Widerstand, welchen ein Körper, dem Bestreben, seine Theile zu trennen, entgegensetzt, nennt man seine Festigkeit.

Es lassen sich hier 3 Unterabtheilungen denken:

1stens die absolute Festigkeit, oder der Widerstand gegen das Zerreißen.

2tens die relative Festigkeit, oder der Widerstand gegen das Zerbrechen.

3tens die rückwirkende Festigkeit oder der Wistand gegen das Zerdrücken oder Zerquetschen.

I. Von der absoluten Festigkeit.

§. 141. Lehrsatz. Die absoluten Festigkeiten zweier Körper von einerlei Materie und durchaus gleicher Dichtigkeit, verhalten sich, wenn die Kräfte, welche sie zu zerreißen streben, mit der Richtung der Fiebern der Körper einerlei Winkel bilden, wie die kleinsten Querschnitte derselben, normal auf die Richtungen der Kräfte genommen.

Beweis. Erfolgt ein Zerreißen, so wird es an der Stelle statt finden, wo der geringste Widerstand sich äußert, also da, wo der Querschnitt der kleinste

ist.

ist. Je mehr nun an diesem Ort Elemente des Körpers sind, d. h. je größer der normale Querschnitt ist, desto mehr Widerstandspuncte ergeben sich, so daß sich also die absoluten Festigkeiten bei durchaus gleichen Dichtigkeiten und einerlei Materie wie die kleinsten Querschnitte verhalten müssen.

§. 142. Zusatz. Bezeichnet also k die absolute Festigkeit eines Querschnitts von einem Quadratzoll in Pfunden; K die eines Querschnitts von F Quadratzollen bei einem Körper von derselben Materie, so verhält sich

$$K : k = F : 1,$$

und es ist also

$$K = k . F.$$

Die Werthe für k sind nur aus Versuchen zu entnehmen, und die folgende kleine Tabelle enthält für einige der am häufigsten vorkommenden Materien diese Werthe nach Eytelweins Angaben (Statik 2ter Bd. XV. Cap.). Zu bemerken ist noch, daß bei Holzarten die Festigkeit nur nach der Richtung der Fiebern zu verstehen ist, und daß die hier angegebenen Zahlen, blos als die kleinsten Mittelwerthe, in runden Summen angenommen, anzusehen sind.

1stens Metalle.

Blei, englisches, gegossen	900
Bleidraht	3900
Eisen	70000
Eisendrath	60000
Kupfer, gegossen	20000
Kupfer, geschmiedet	40000
Stahl	110000

2tens Holzarten.

Aepfelbaum	10000
Birnbaum	11000
Büchen	22000
Eichen	22000
Erlen	24000
Eschen	21000
Fichten, Kiefern	10000
Linden	13000
Nußbaum	14000
Pflaumenbaum	11000
Ulmen	14000
Weiden	15000

§. 143. Aufgabe. Bei der in (Fig. 101) angegebenen Zusammenstellung wird in D ein Charnier vorausgesetzt, und es soll der senkrechte Querschnitt F des prismatischen Balkens AB, der sowohl in A als in B verstärkt ist, der Bedingung gemäß, angegeben werden, daß seine absolute Festigkeit k. F mit den Kräften Q, P, R im Gleichgewicht stehe.

Auflösung. Setzt man die horizontalen Gegenwirkungen in A und B gleich y und x, so hat man, eine unendlich kleine Bewegung, dem Bestreben von x gemäß, angenommen,

1stens $x - y = 0$; also $x = y$.

Denkt man sich ferner eine Bewegung, dem Bestreben von Q gemäß, und setzt diesen Weg $= v$; so ist der gleichzeitige Weg von R $= \frac{1}{2} v$ und von P gleich $\frac{1}{2} v$; aber der von x

$$= - [\sqrt{a^2 - (a \operatorname{Sin.} \alpha - v)^2} - a \operatorname{Cos.} \alpha];$$

und der von y

$$= - [\sqrt{b^2 - (b \operatorname{Sin.} \beta - v)^2} - b \operatorname{Cos.} \beta].$$

Man hat also

2tens $Qv + R \frac{1}{2} v + P \frac{1}{2} v - x [\sqrt{a^2 - (a \operatorname{Sin.} \alpha - v)^2} - a \operatorname{Cos.} \alpha]$
$- y [\sqrt{b^2 - (b \operatorname{Sin.} \beta - v)^2} - b \operatorname{Cos.} \beta] = 0$

und aus beiden Gleichungen entspringt

$$x = y = \frac{(Q + \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} R) v}{\sqrt{a^2 - (a \operatorname{Sin.} \alpha - v)^2} + \sqrt{b^2 - (b \operatorname{Sin.} \beta - v)^2} - c}$$

welcher Ausdruck für $v = 0$ den Werth

$$\frac{(Q + \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} R)}{\operatorname{tg.} \alpha + \operatorname{tg.} \beta}$$ annimmt.

Man hat also

$$x = y = \frac{(Q + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R) \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \beta}{\operatorname{Sin.} (\alpha + \beta)}$$

Folglich

$$kF = \frac{(Q + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R) \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \beta}{\operatorname{Sin.} (\alpha + \beta)}$$

und daher

$$F = \frac{(Q + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}R) \operatorname{Cos.} \alpha \operatorname{Cos.} \beta}{k \operatorname{Sin.} (\alpha + \beta)}.$$

Anmerk. Durch Zerlegung der Kräfte erhält man hier den Werth für x leichter.

Beispiel. Ist $\alpha = 45°$; $\beta = 45°$; Q = 100000 ℔; P = 500 ℔; R = 500 ℔; AB ein fichtener quadratförmiger Balken, also k = 10000 ℔; so entsteht F = 5,025 Quadratzoll, also jede Seite des Quadrats = $2\frac{1}{4}$ Zoll beinahe.

II. Von der relativen Festigkeit.

§. 144. Aufgabe. Ein Körper, welcher ein rechtwinklichtes Parallelepipedum bildet, ragt horizontal mit der Länge L aus einer Vermaurung hervor (*Fig.* 102). An seinem Ende wirkt ein Gewicht Q lothrecht herab, welches im Verein mit seinem eigenen Gewicht W dieses Prismen zu zerbrechen strebt. Man soll die Größe der brechenden Kraft für den Fall bestimmen, für welchen die geringste Vergrößerung derselben ein augenblickliches Zerbrechen des Prismen zur Folge haben würde.

Auflösung. Erfolgt ein Zerbrechen, so wird, wenn der Körper, wie vorausgesetzt wird, durchaus

gleiche Dichtigkeit hat, in dem Querschnitt a c g f ein Trennen der Theile des Körpers statt finden, in welchen derselbe aus der Vermaurung hervorragt, weil für diese Stelle das ganze Gewicht des Prismen mit auf Brechung wirkt, für jeden andern Querschnitt zwischen a c g f und Q aber nur ein Theil desselben. Bezeichnet nun B die Breite und H die Höhe des normalen Querschnitts, so ist, B und H in Zollen verstanden, die absolute Festigkeit im Querschnitt a c g f nach §. 142

$$= k . B, H$$

und nimmt man diese im Mittel- oder Schwerpunct dieses Querschnitts als vereint an, so entsteht in Beziehung auf die für den Augenblick des Zerbrechens statt findende Drehungsachse a c die Gleichung

$$Q . L + W . \tfrac{1}{2} L = k\, B H . \tfrac{1}{2} H,$$

woraus sich $Q + \frac{1}{2} W$ oder die mit der relativen Festigkeit im Gleichgewicht stehende Kraft

$$= \frac{k}{2} . \frac{B H^2}{L} \text{ ergiebt.}$$

§. 145. Zusatz. Insofern nach §. 142 die Werthe für k als bekannt anzusehen sind, so müßte sich also auch aus $\frac{k}{2} . \frac{B H^2}{L}$ für die dort angegebenen Materien die relative Festigkeit immer bestimmen lassen. Allein solche Resultate stimmen wohl deshalb mit den Erfahrungen nicht überein, weil in dem Querschnitt a c g f die absolute Festigkeit in den verschiedenen Fiebern nicht zugleich überwunden wird, sondern in

denen bei fg früher, und dann erst in denen näher bei ac. Es soll daher der Ausdruck $\frac{k}{2} \cdot \frac{B H^2}{L}$ nur als Verhältnißzahl für die Größe der relativen Festigkeit P gebraucht werden. Bezeichnet also für ein anderes rechtwinklichtes Parallelepipedum von derselben Materie l die Länge; b die Breite, h die Höhe und p die relative Festigkeit, so hat man

$$P : p = \frac{B H^2}{L} : \frac{b h^2}{l}$$

und hieraus

$$p = \frac{P L}{B . H^2} \cdot \frac{b h^2}{l}.$$

Ist nun $\frac{P L}{B H^2}$ aus zuverlässigen Versuchen bei irgend einer Materie $= n$ gefunden, so hat man für dieselbe Materie bei den Abmessungen b, h, l

$$\text{I.} \quad p = n . \frac{b h^2}{l}.$$

In der folgenden Tabelle sind für die gewöhnlichsten Holzarten nach Eytelwein die Werthe für n angegeben.

Kiefernholz	2878
Sommereichen	4000
Steineichen	4109
Rothtannen	2049
Weißtannen	2737
Rothbüchen	4710
Weißbüchen	3005
Erlen	3449

Uebrigens ist vorausgesetzt:

1stens daß die Fiebern parallel mit l laufen.

2tens daß von augenblicklichem Bruch die Rede ist.

Ist Ausdauer auf lange Zeit gemeint, so kann man nach Eytelweins Angabe nur den 32sten Theil des nach obiger Tabelle gefundenen Resultats annehmen.

§. 146. Aufgabe. Ein horizontaler Balken von der Länge l, Breite b und Höhe h liegt an beiden Enden auf Unterlagen (*Fig.* 103). An irgend einer Stelle derselben, in der Entfernung x von einer der beiden Unterlagen wirkt lothrecht auf ihn eine Gewalt z. Man soll z fürs Gleichgewicht mit der relativen Festigkeit, in Beziehung auf augenblicklichen Bruch, bestimmen.

Auflösung. Aus z entspringt auf eine der Unterlagen, etwa die in A ein Druck $= \frac{(l-x)z}{l}$, und da die gleichgroße Gegenwirkung der Unterlage mit der relativen Festigkeit in der Brechungsebene bei z im Gleichgewicht sein soll, so muß nach §. 145

$$\frac{(l-x)\,z}{l} = n.\frac{b\,h^2}{x}, \text{ folglich}$$

$$z = \frac{n\,b\,h^2\,l}{(l-x)\,x} \text{ sein.}$$

Für lange Ausdauer hat man also nur

$$\frac{n\,b\,h^2\,l}{32\,(l-x)\,x}.$$

Ist $x = \frac{1}{2}\,l$; so entsteht aus

$$z = \frac{n\,b\,h^2\,l}{(l-x)\,x}$$

der Werth $4n. \frac{b h^2}{l} = 4p$,

d. h. der Balken von der Länge l in horizontaler Lage und an beiden Enden unterstützt, kann in seiner Mitte 4mal so viel tragen, als wenn er eben so lang horizontal aus einer Vermaurung hervorragte, und an seinem andern Ende von einer Kraft angegriffen würde.

Wirkt die Thätigkeit nicht in seiner Mitte auf einen Punct, sondern ist die Last gleichförmig über den ganzen Balken vertheilt, so ist die Tragbarkeit doppelt so groß, also $= 8n \frac{b h^2}{l}$; für lange Ausdauer kann man also nur $\frac{1}{4} n \frac{b h^2}{l}$ annehmen.

Hievon überzeugt man sich leicht folgendergestalt: ist (*Fig.* 102) die gleichförmig auf den Balken zu vertheilende Last, um eben so viel, wie Q zu bewirken, $= W$; so wirkt auf dx die Gewalt $\frac{dx}{L} W$; und ihr Moment ist $= x. \frac{dx}{L} W$; also das Moment für die Länge $x = \frac{W}{L} \int x\,dx = \frac{1}{2} x^2. \frac{W}{L}$. Für $x = L$ ist also dasselbe $= \frac{1}{2} L W$; und soll dies $= Q L$ sein, so hat man $W = 2 Q$.

Beispiel. Ein Balken von Sommereichenholz liegt an beiden Enden auf, ist zwischen den Unterlagen 15 Fuß lang; ferner 10″ breit und 12″ hoch. Welche

Last kann derselbe, gleichförmig über ihn vertheilt, auf die Dauer tragen?

Sie ist $= \frac{1}{4} . 4000 . \frac{10 . 12^2}{15 . 12} = 8000$ ℔.

Augenblicklichen Bruch würde eine gleichförmig vertheilte Last $= 256000$ ℔ bewirken.

In der Mitte vereint könnte er, für augenbilcklichen Bruch, nur 128000 ℔ tragen.

In der Entfernung $= 3'$ von einer der Unterlagen aber

$$\frac{4000 . 10 . 12^2 . 15 . 12}{(15 . 12 - 3 . 12) . 3 . 12} \; 200000 \text{ ℔}.$$

§. 147. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Baumstamm den stärksten rechtwinklicht parallelepipedischen Balken zu beschlagen.

Auflösung. Ist der Durchmesser des Cylinders $= a$; so ist *(Fig 104)* der Balken von der Breite y und Höhe x der stärkste, wenn die Verhältnißzahl N seiner relativen Festigkeit, nemlich yx^2 ein Größtes wird.

Aus $N = y . x^2$ oder

$N = y . (a^2 - y^2)$ entsteht aber

$$\frac{dN}{dy^2} = a^2 - \frac{1}{3} y^2 \text{ und}$$

$$\frac{d^2 N}{dy^2} = - \frac{2}{3} y;$$

und $a^2 - \frac{1}{3} y^2$ wird $= 0$, für

$$y = a \sqrt{\tfrac{1}{3}};$$

und da nun, wenn $y = a \sqrt{\frac{1}{3}}$, sich für $\frac{d^2 N}{dy^2}$ ein negativer Werth ergiebt, so ist $y . x^2$ ein Maxim.,

wenn $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; also $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. Aus diesen beiden Werthen ergiebt sich leicht die Construction: man theile a in 3 gleiche Theile, errichte in a auf beiden Theilungspuncten Normalen, eine nach oben, die andere nach unten, so ergeben sich in den Schneidungspuncten dieser Normalen mit der Peripherie die Eckpuncte des erforderlichen Querschnitts. Sucht man das Verhältniß von x und y, so hat man

$$x : y = \sqrt{2} : 1.$$

Beispiel. Bei einem Getreide-Magazin sollen die auf $15' = 180''$ lang frei liegenden Balken im Lichten $3' = 36''$ auseinander liegen, und auf die Bediehlung soll eine $2' = 24''$ hohe Roggen-Ausschüttung erfolgen. Die vortheilhaftesten Abmessungen der Balken für die Ausdauer zu bestimmen.

Ist das Gewicht eines Cubiczolls Roggen $= \frac{45}{1728}$ ℔; die Höhe der Balken $= x''$; ihre Breite $= y''$; so ist auf jeden Balken gleichförmig eine Last

$$= \frac{180 \cdot (y + 36) \cdot 24 \cdot 45}{1728} \text{ ℔}$$

vertheilt; sind nun die Balken von Kiefernholz, also $n = 2878$; so ist die Tragbarkeit eines jeden für die Dauer nach §. 146

$$= \frac{1}{4} \cdot 2878 \cdot \frac{y \cdot x^2}{180},$$

und es ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{1}{4} \cdot 2878 \cdot \frac{y \cdot x^2}{180} = \frac{180 \cdot (y + 36) \cdot 24 \cdot 45}{1728}$$

wobei auf das eigene Gewicht des Balkens und der

Bediehlung, dafür aber auch auf die Tragbarkeit der letzteren, keine Rücksicht genommen ist. Als zweite Gleichung entsteht

$$x : y = \sqrt{2} : 1$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$y^3 - 14{,}072 . y - 506{,}6 = 0;$$

hieraus ergiebt sich

$$y = 8{,}56''$$

und also ist $x = 21{,}1''$.

§. 148. Aufgabe. Die relative Festigkeit eines unter dem Neigungswinkel α gegen den Horizont geneigten Balkens von der Länge l, Breite b und Höhe h mit der eines horizontalen Balkens von derselben Breite b, derselben Höhe h, aber nur von der horizontalen Projectionslänge l Cos. α, unter übrigens durchaus gleichen Umständen, zu vergleichen.

Auflösung. Gesetzt, in der Entfernung x (*Fig.* 105) von einer der beiden Unterlagen sei auf dem geneigten Balken ein Gewicht = z mit seiner relativen Festigkeit im Gleichgewicht, und in der zugehörigen horizontalen Projections-Entfernung x Cos. α sei auf dem horizontalen Balken ein Gewicht = y mit seiner relativen Festigkeit im Gleichgewicht, so ist nach §. 146

$$y = \frac{n\, b\, h^2\, l\, \text{Cos.}\,\alpha}{(l\, \text{Cos.}\,\alpha - x\, \text{Cos.}\,\alpha)\, x\, \text{Cos.}\,\alpha} = \frac{n\, b\, h^2\, l}{(l - x)\, x\, \text{Cos.}\,\alpha}$$

Nun entspringt aber aus z ein abgleitendes Bestreben, welches nicht auf Zerbrechung des Balkens, und ein Normal-Druck = z Cos. α, welcher blos

auf Zerbrechung desselben wirkt. Fürs Gleichgewicht muß also nach §. 146

$$z \,\mathrm{Cos.}\,\alpha = \frac{n\,b\,h^2\,l}{(l - x)\,x}\text{; folglich}$$

$$z = \frac{n\,b\,h^2\,l}{(l - x)\,x\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}\text{ sein.}$$

Aus der Vergleichung der Werthe für y und z ergiebt sich $y = z$.

Der geneigte Balken trägt also dieselbe Last, welche sein horizontaler Projections-Balken unter übrigens gleichen Umständen tragen kann.

III. Von der rückwirkenden Festigkeit.

§. 149. Bezeichnen Q; q die rückwirkenden Festigkeiten zweier rechtwinklicht parallelepipedischen lothrecht stehender Körper; A, a ihre Höhen; B, b die breiteren, H, h die schmäleren Seiten ihrer horizontalen Querschnitte, so verhält sich nach den angestellten Versuchen und Eytelweins Bestimmungen

$$Q : q = \frac{BH^3}{A^2} : \frac{bh^3}{a^2}$$

und es ist also

$$q = \frac{QA^2}{BH^3} : \frac{bh^3}{a^2}.$$

Ist nun $\frac{QA^2}{BH^3}$ aus sorgfältigen Versuchen bei irgend einer Materie $= m$ gefunden, so hat man für dieselbe Materie, bei den Abmessungen b, h, a,

$$q = m.\,\frac{bh^3}{a^2},$$

wo man, wenn von Ausdauer die Rede ist, wie

§. 145, ebenfalls nur

$$q = \frac{m}{32} \cdot \frac{b\,h^3}{a^2}$$ annehmen kann.

Beziehen sich alle Abmessungen auf Zolle, q aber auf Pfunde, so hat man, nach Eytelwein, für die Ausdauer

bei Kiefernholz $q = 48520 \cdot \frac{b\,h^3}{a^2}$,

bei Eichenholz $q = 61408 \cdot \frac{b\,h^3}{a^2}$.

Verbesserungen
zum zweiten Bändchen.

Pag. 86 streiche man die letzten 4 Zeilen
— 87 alles;
— 88 die ersten 15 Zeilen weg, und setze dafür folgendes:

Aus ihr folgt:

$$dR = -\tfrac{2}{3}a^3 \operatorname{Sin}\beta - b^2 h \beta \operatorname{Cosec}\beta^2 + b^2 h \operatorname{Cotg}\beta - b^2 \varrho \beta \operatorname{Cotg}\beta \operatorname{Cosec}\beta + b^2 \varrho \operatorname{Cosec}\beta$$

oder

$$dR = \frac{-\tfrac{2}{3}a^3 \operatorname{Sin}\beta^3 - b^2 h\beta + b^2 h \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta - b^2 \varrho\beta \operatorname{Cos}\beta + b^2 \varrho \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\beta^2}$$

und es ist nun derjenige Werth für β zu suchen, welcher dR gleich Null; und d^2R gleich einer negativen Größe macht. Die wirkliche Entwicklung von β aus $dR = 0$ führt aber auf eine höchst verwickelte transcendente Gleichung. Indessen erhellet sogleich, daß der Zähler des Werths für dR sich zu Null verwandelt, wenn $\beta = 0$ gesetzt wird, und es würde also $\beta = 0$ ein Max. oder Min. für R liefern, wenn nicht zugleich der Nenner $\operatorname{Sin}\beta^2$ des Werths für dR auch $= 0$ würde, wenn $\beta = 0$ ist, so daß also dR für $\beta = 0$, den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt.

Es ist aber sehr wohl möglich, daß $\frac{0}{0}$ in diesen Fall wirklich $= 0$ ist, weshalb jetzt der wahre Werth von dR für $\beta = 0$ dadurch bestimmt werden soll, daß man im Werth für dR die erste Ableitung des Zählers durch die erste Ableitung des Nenners dividirt, und dann $\beta = 0$ setzt.

Es entsteht

$$(-2a^3 \operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta - b^2 h + b^2 h \operatorname{Cos}\beta^2 - b^2 h \operatorname{Sin}\beta^2 + b^2 \varrho\beta \operatorname{Sin}\beta - b^2 \varrho \operatorname{Cos}\beta + b^2 \varrho \operatorname{Cos}\beta) : 2 \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta$$

für $\beta = 0$ gültig, oder

$$\frac{-2a^3 \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta - 2b^2 h \operatorname{Sin}\beta + b^2 \varrho\beta}{2\operatorname{Cos}\beta}$$

welcher Ausdruck, für $\beta = 0$, wirklich zu $\frac{0}{0}$ oder 0 wird, so daß also R ein Max. oder Min. sein kann, wenn $\beta = 0$ ist.

Bildet man nun, um zu beurtheilen, ob ein Max. oder Min. gefunden ist, die zweite Ableitung so entsteht

$$d^2 R = (-\tfrac{2}{3} a^3 \operatorname{Sin}\beta^3 \operatorname{Cos}\beta - 2b^2 h \operatorname{Sin}\beta + 2b^2 h\beta \operatorname{Cos}\beta + b^2 \varrho\beta + b^2 \varrho\beta \operatorname{Cos}\beta^2 - 2b^2 \varrho \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta) : \operatorname{Sin}\beta^3$$

welcher Ausdruck, für $\beta = 0$, unbestimmt, nemlich $= \frac{0}{0}$ wird.

Sucht man nun, um seinen Werth für $\beta = 0$ zu erhalten, die erste Ableitung des Zählers und dividirt dieselbe durch diese Ableitung des Nenners, so ergiebt sich

$$(\tfrac{4}{3} a^3 \operatorname{Sin}\beta^3 - 2a^3 \operatorname{Sin}\beta - 2b^2 h\beta - 2b^2 \varrho\beta \operatorname{Cos}\beta + 3b^2 \varrho \operatorname{Sin}\beta) : 3 \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Cos}\beta$$

welcher Ausdruck, für $\beta = 0$ noch unbestimmt, nemlich $= \frac{0}{0}$ bleibt.

Wendet man daher dasselbe Verfahren noch einmal an, so erhält man

$$(4a^3 \operatorname{Sin}\beta^2 \operatorname{Cos}\beta - 2a^3 \operatorname{Cos}\beta - 2b^2 h + 2b^2 \varrho\beta \operatorname{Sin}\beta + b^2 \varrho \operatorname{Cos}\beta) : (-3 \operatorname{Sin}\beta^2 + 3 \operatorname{Cos}\beta^2)$$

und dieser Ausdruck liefert, für $\beta = 0$; das Resultat

$$\frac{-2a^3 - 2b^2 h + b^2 \varrho}{3} \text{ oder}$$

$$-\frac{r-\varrho}{3}[2r^2 + r\varrho + \varrho^2 + 2(r+\varrho)h];$$

und da dasselbe negativ ist, so wird also R ein Max. wenn $\beta = 0$ ist. Es ist aber, für $\beta = 0$;

$$\operatorname{Cos}\beta = 1;\ \beta \operatorname{Cotg}\beta = 1;\ \beta \operatorname{Cosec}\beta = 1,$$

und der Werth des Max. ist folglich

$$\tfrac{2}{3}a^2 + \text{u. s. w.}$$

Pag. 91 streiche man die Zeilen 4, 5, 6, 7 und 8 weg, und setze dafür:

Es wird nun x ein Max. für denjenigen Werth von β für welchen

$$R = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{Cos} \beta + b^2 (h - \varrho \operatorname{Cos} \delta) \beta \operatorname{Cotg} \beta + b^2 \varrho \beta \operatorname{Cosec} \beta$$

ein Max. wird.

Dieser Ausdruck stimmt aber ganz mit dem in §. 62 überein, nur ist hier $h - \varrho \operatorname{Cos} \delta$ wo §. 62 blos h stand. Es wird also auch, wie §. 62; $dR = o$ für $\beta = o$ und ebenfalls für $\beta = o$

$$d^2 R = \frac{-2a^3 - 2b^2 (h - \varrho \operatorname{Cos} \delta) + b^2 \varrho}{3}; \text{ oder}$$

$$d^2 R = \frac{r - \varrho}{3} [-2r^2 - r\varrho - \varrho^2 - 2(r + \varrho) h + 2(r + \varrho) \varrho \operatorname{Cos} \delta].$$

Es muß demnach bewiesen werden können, daß

$$2r^2 + r\varrho + \varrho^2 + 2(r + \varrho) h > 2(r + \varrho) \varrho \operatorname{Cos} \delta \text{ ist,}$$

dann ist $d^2 R$ negativ, folglich R, also auch x ein Maxim. für $\beta = o$.

Nun ist aber $r > \varrho$; also

$$2r^2 > (r + \varrho) \varrho; \text{ daher auch}$$

$$2r^2 + r\varrho + \varrho^2 + 2(r + \varrho) h > 2(r + \varrho) \varrho; \text{ folglich}$$

$$2r^2 + r\varrho + \varrho^2 + 2(r + \varrho) h > 2(r + \varrho) \varrho \operatorname{Cos} \delta$$

wie bewiesen werden mußte.

Das größtnöthigste x ergiebt sich demnach aus der Gleichung:

$$H x^2 + \text{u. s. w.}$$

Beim Verleger sind auch folgende Bücher erschienen:

Crelle, A. L., Theorie des Windstoßes, m. 1. Kupf. gr. 4. 10 gr.

Eytelwein, J. A., praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1stes Heft. Von Pfählen, Rammen und Fangdammen, m. 14 Kupf. in Fol. 2te verb. Auflage, gr. 4. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 2tes Heft. Von den Maschinen zum Ausschöpfen, des Wassers aus dem Grundbaue, mit 14 Kupfer in Fol. 2te Aufl. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 3tes Heft. Von Bollwerken, Freiarchen, m. 8 Kupf. im Fol. 2te Auflage. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 4tes Heft. Bau der Schiffahrtschleusen, mit 11 Kupfern. 3 Rthlr. 8 gr.

— — Bemerkungen über den Stoßheber mit 3 Kupf. in Fol., gr. 4. 1 Rthlr. 16 gr.

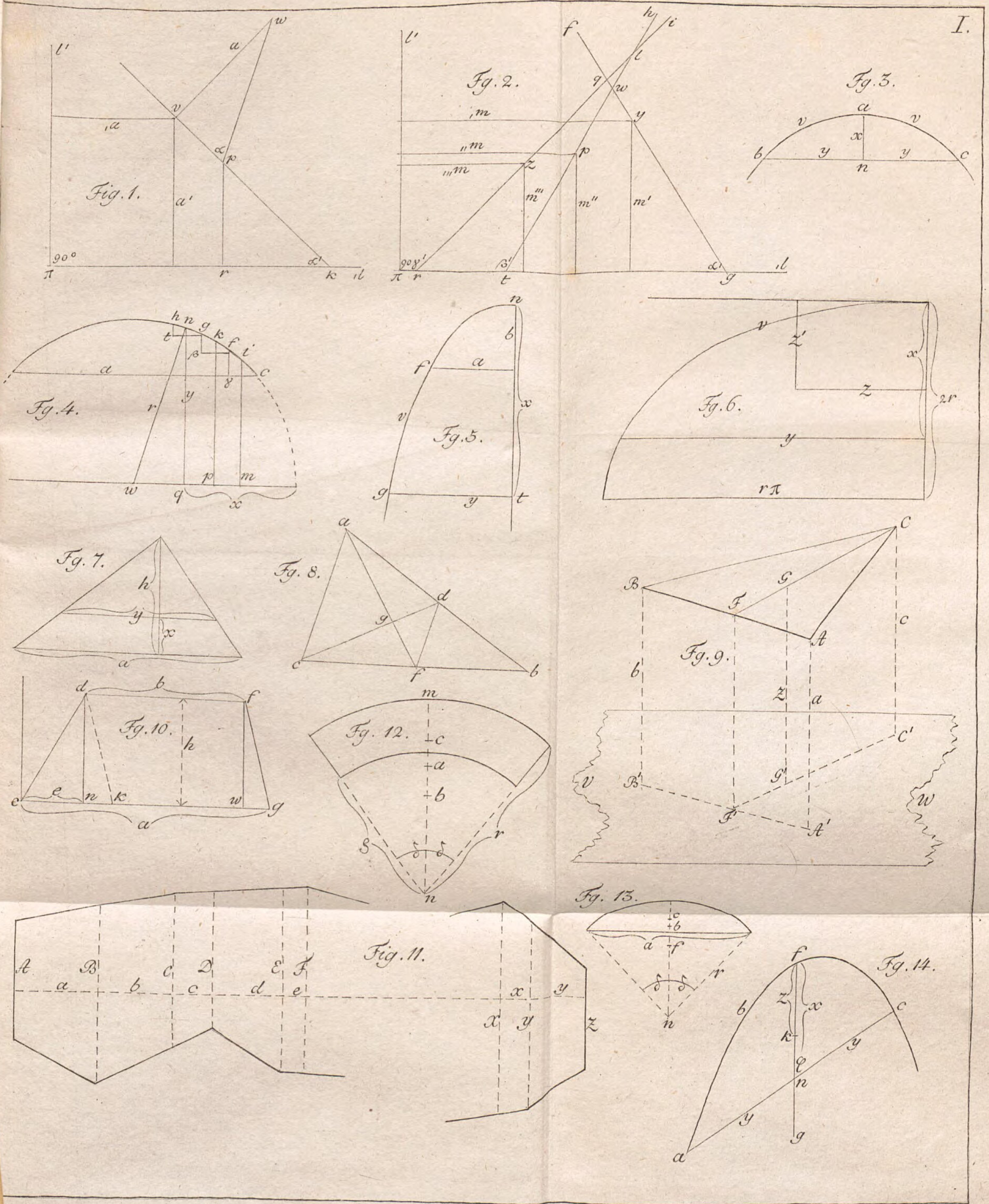
— — praktische Anweisung zur Konstruction der Faschinenwerke, mit 8 Kupfern in Fol. 2te Auflage. gr. 4. 2 Rthlr. 16 gr.

— — Handbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf Architektur, 3 Bde., mit 22 Kupfertaf. in Fol. gr. 8. 7 Rthlr. 12 gr.

— — Handbuch der Perspective, 2 Thle., mit 18 Kupfertafeln in Fol., gr. 4. 5 Rthlr. 8 gr.

— — Vergleichung der Maaße und Gewichte in Preußen. 2te umgearbeitete Aufl. in 8. 18 gr.

Nachtrag zu diesem Werk.


I.
Fig. 1.
Fg. 2.
Fg. 3.
Fg. 4.
Fg. 5.
Fg. 6.
Fg. 7.
Fg. 8.
Fg. 9.
Fg. 10.
Fig. 11.
Fg. 12.
Fg. 13.
Fg. 14.

Beim Verleger sind auch folgende Bücher erschienen:

Crelle, A. L., Theorie des Windstoßes, m. 1. Kupf. gr. 4. 10 gr.

Eytelwein, J. A., praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1stes Heft. Von Pfählen, Rammen und Fangdammen, m. 14 Kupf. in Fol. 2te verb. Auflage, gr. 4. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 2tes Heft. Von den Maschinen zum Ausschöpfen, des Wassers aus dem Grundbaue, mit 14 Kupfer in Fol. 2te Aufl. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 3tes Heft. Von Bollwerken, Freiarchen, m. 8 Kupf. im Fol. 2te Auflage. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 4tes Heft. Bau der Schiffahrtschleusen, mit 11 Kupfern. 3 Rthlr. 8 gr.

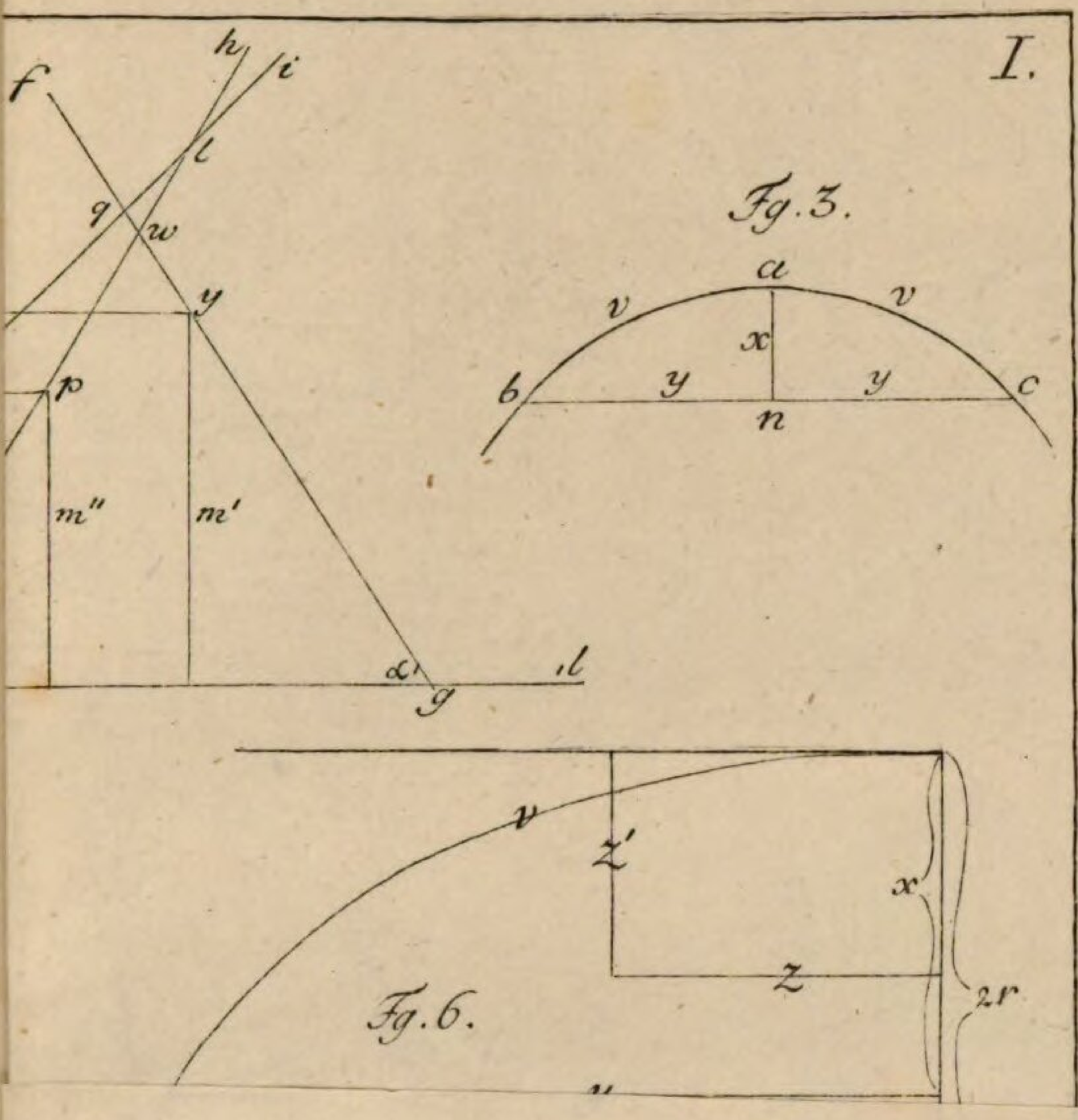
— — Bemerkungen über den Stoßheber mit 3 Kupf. in Fol., gr. 4. 1 Rthlr. 16 gr.

— — praktische Anweisung zur Konstruction der Faschinenwerke, mit 8 Kupfern in Fol. 2te Auflage. gr. 4. 2 Rthlr. 16 gr.

— — Handbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf Architektur, 3 Bde., mit 22 Kupfertaf. in Fol. gr. 8. 7 Rthlr. 12 gr.

— — Handbuch der Perspective, 2 Thle., mit 18 Kupfertafeln in Fol., gr. 4. 5 Rthlr. 8 gr.

— — Vergleichung der Maaße und Gewichte in Preußen. 2te umgearbeitete Aufl. in 8. 18 gr.
Nachtrag zu diesem Werk.


I.
Fg. 3.
a
v
v
x
b
y
y
c
n
h
i
f
l
q
w
y
p
m''
m'
α
d
g
v
z'
x
z
2r
Fg. 6.

Beim Verleger sind auch folgende Bücher erschienen:

Crelle, A. L., Theorie des Windstoßes, m. 1. Kupf. gr. 4. 10 gr.

Eytelwein, J. A., praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1stes Heft. Von Pfählen, Rammen und Fangdammen, m. 14 Kupf. in Fol. 2te verb. Auflage, gr. 4. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 2tes Heft. Von den Maschinen zum Ausschöpfen, des Wassers aus dem Grundbaue, mit 14 Kupfer in Fol. 2te Aufl. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 3tes Heft. Von Bollwerken, Freiarchen, m. 8 Kupf. im Fol. 2te Auflage. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 4tes Heft. Bau der Schiffahrtschleusen, mit 11 Kupfern. 3 Rthlr. 8 gr.

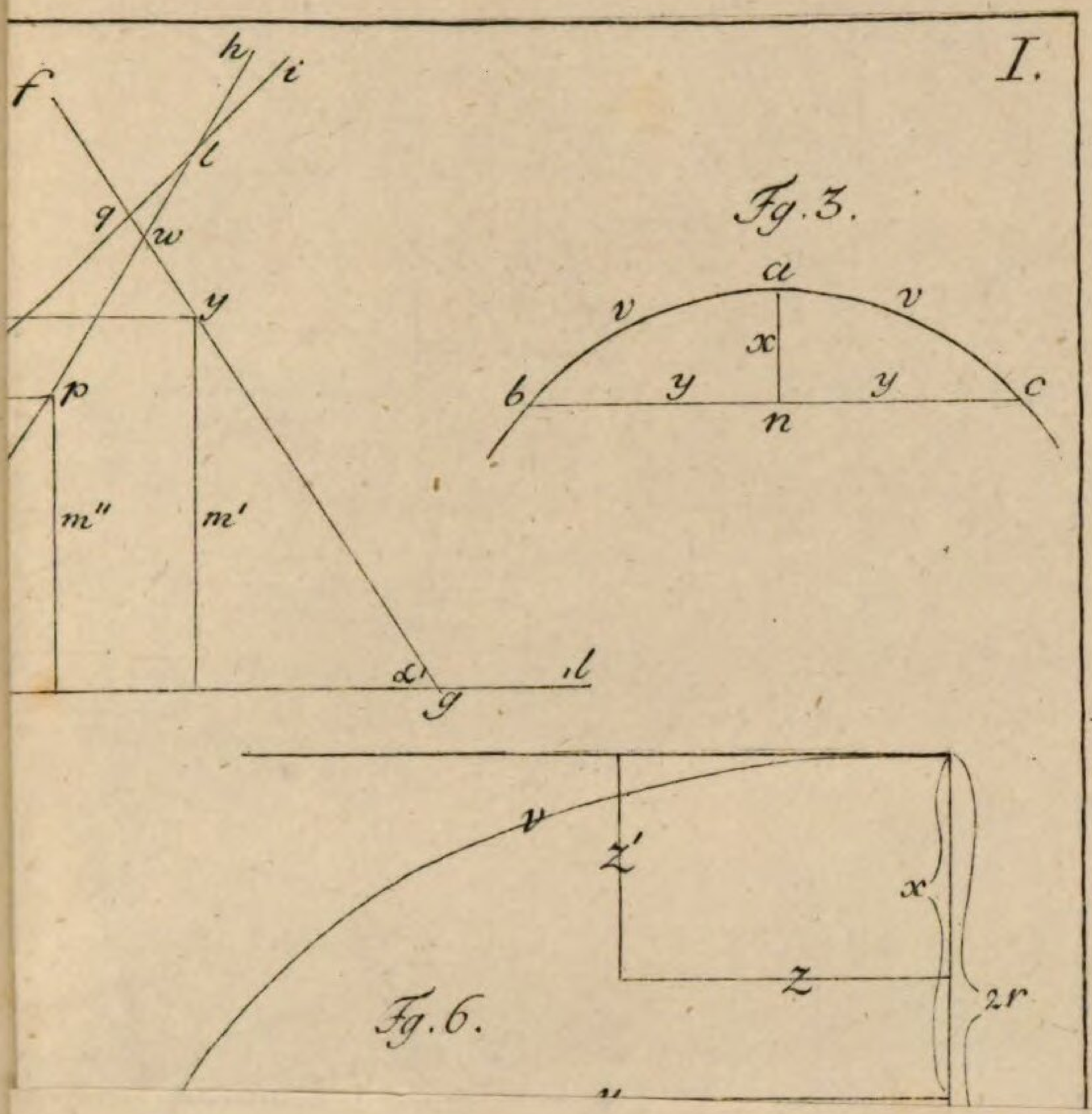
— — Bemerkungen über den Stoßheber mit 3 Kupf. in Fol., gr. 4. 1 Rthlr. 16 gr.

— — praktische Anweisung zur Konstruction der Faschinenwerke, mit 8 Kupfern in Fol. 2te Auflage. gr. 4. 2 Rthlr. 16 gr.

— — Handbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf Architektur, 3 Bde., mit 22 Kupfertaf. in Fol. gr. 8. 7 Rthlr. 12 gr.

— — Handbuch der Perspective, 2 Thle., mit 18 Kupfertafeln in Fol., gr. 4. 5 Rthlr. 8 gr.

— — Vergleichung der Maaße und Gewichte in Preußen. 2te umgearbeitete Aufl. in 8. 18 gr.
Nachtrag zu diesem Werk.


I.
Fg.3.
a
v
v
x
b
y
y
c
n
f
h
i
l
q
w
y
p
m''
m'
α
d
g
v
z'
x
z
2r
Fg.6.

Beim Verleger sind auch folgende Bücher erschienen:

Crelle, A. L., Theorie des Windstoßes, m. 1. Kupf. gr. 4. 10 gr.

Eytelwein, J. A., praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1stes Heft. Von Pfählen, Rammen und Fangdammen, m. 14 Kupf. in Fol. 2te verb. Auflage, gr. 4. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 2tes Heft. Von den Maschinen zum Ausschöpfen, des Wassers aus dem Grundbaue, mit 14 Kupfer in Fol. 2te Aufl. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 3tes Heft. Von Bollwerken, Freiarchen, m. 8 Kupf. im Fol. 2te Auflage. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 4tes Heft. Bau der Schiffahrtschleusen, mit 11 Kupfern. 3 Rthlr. 8 gr.

— — Bemerkungen über den Stoßheber mit 3 Kupf. in Fol., gr. 4. 1 Rthlr. 16 gr.

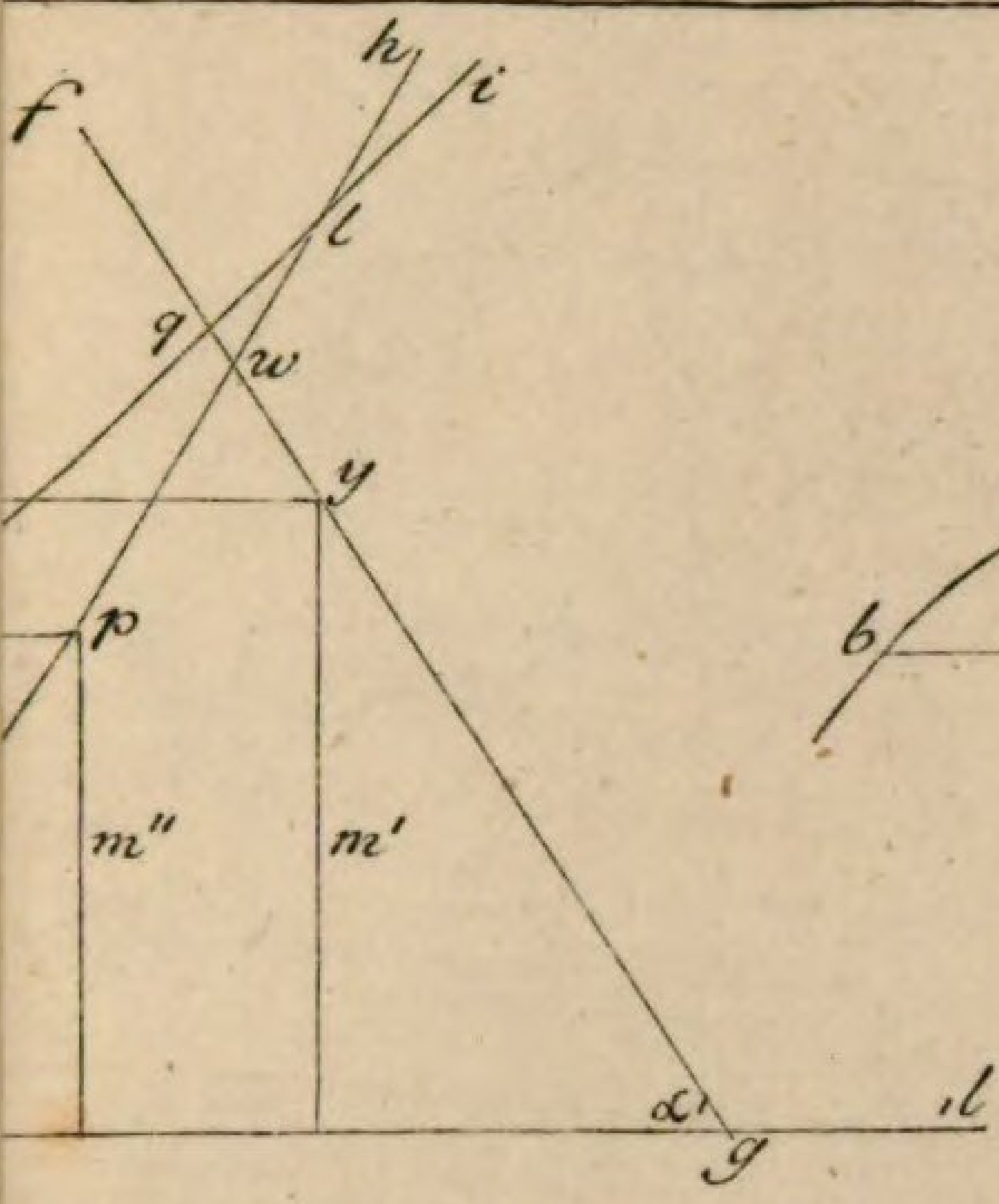
— — praktische Anweisung zur Konstruction der Faschinenwerke, mit 8 Kupfern in Fol. 2te Auflage. gr. 4. 2 Rthlr. 16 gr.

— — Handbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf Architektur, 3 Bde., mit 22 Kupfertaf. in Fol. gr. 8. 7 Rthlr. 12 gr.

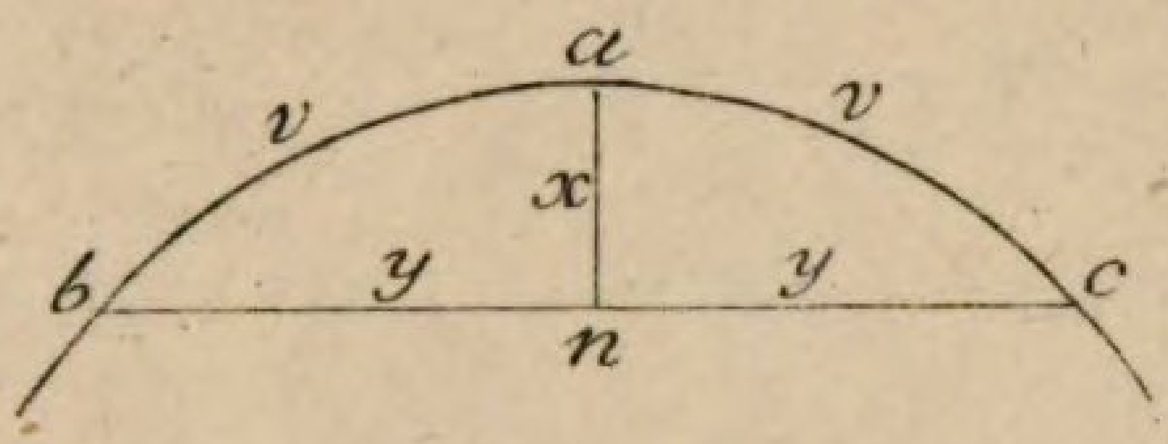
— — Handbuch der Perspective, 2 Thle., mit 18 Kupfertafeln in Fol., gr. 4. 5 Rthlr. 8 gr.

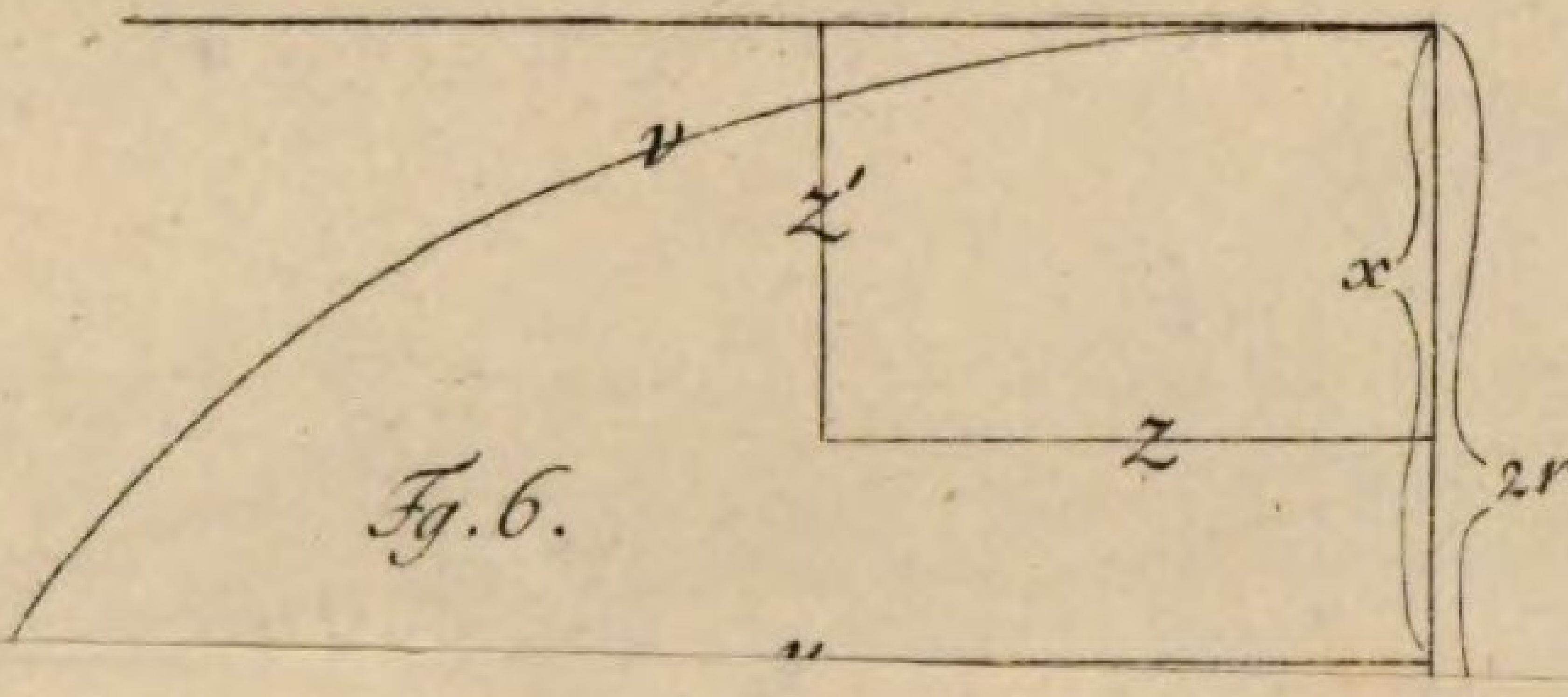
— — Vergleichung der Maaße und Gewichte in Preußen. 2te umgearbeitete Aufl. in 8. 18 gr.
Nachtrag zu diesem Werk.

I.



Fg. 3.





Fg. 6.

Beim Verleger sind auch folgende Bücher erschienen:

Crelle, A. L., Theorie des Windstoßes, m. 1. Kupf. gr. 4. 10 gr.

Eytelwein, J. A., praktische Anweisung zur Wasserbaukunst, 1stes Heft. Von Pfählen, Rammen und Fangdammen, m. 14 Kupf. in Fol. 2te verb. Auflage, gr. 4. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 2tes Heft. Von den Maschinen zum Ausschöpfen, des Wassers aus dem Grundbaue, mit 14 Kupfer in Fol. 2te Aufl. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 3tes Heft. Von Bollwerken, Freiarchen, m. 8 Kupf. im Fol. 2te Auflage. 3 Rthlr. 8 gr.

— — 4tes Heft. Bau der Schiffahrtschleusen, mit 11 Kupfern. 3 Rthlr. 8 gr.

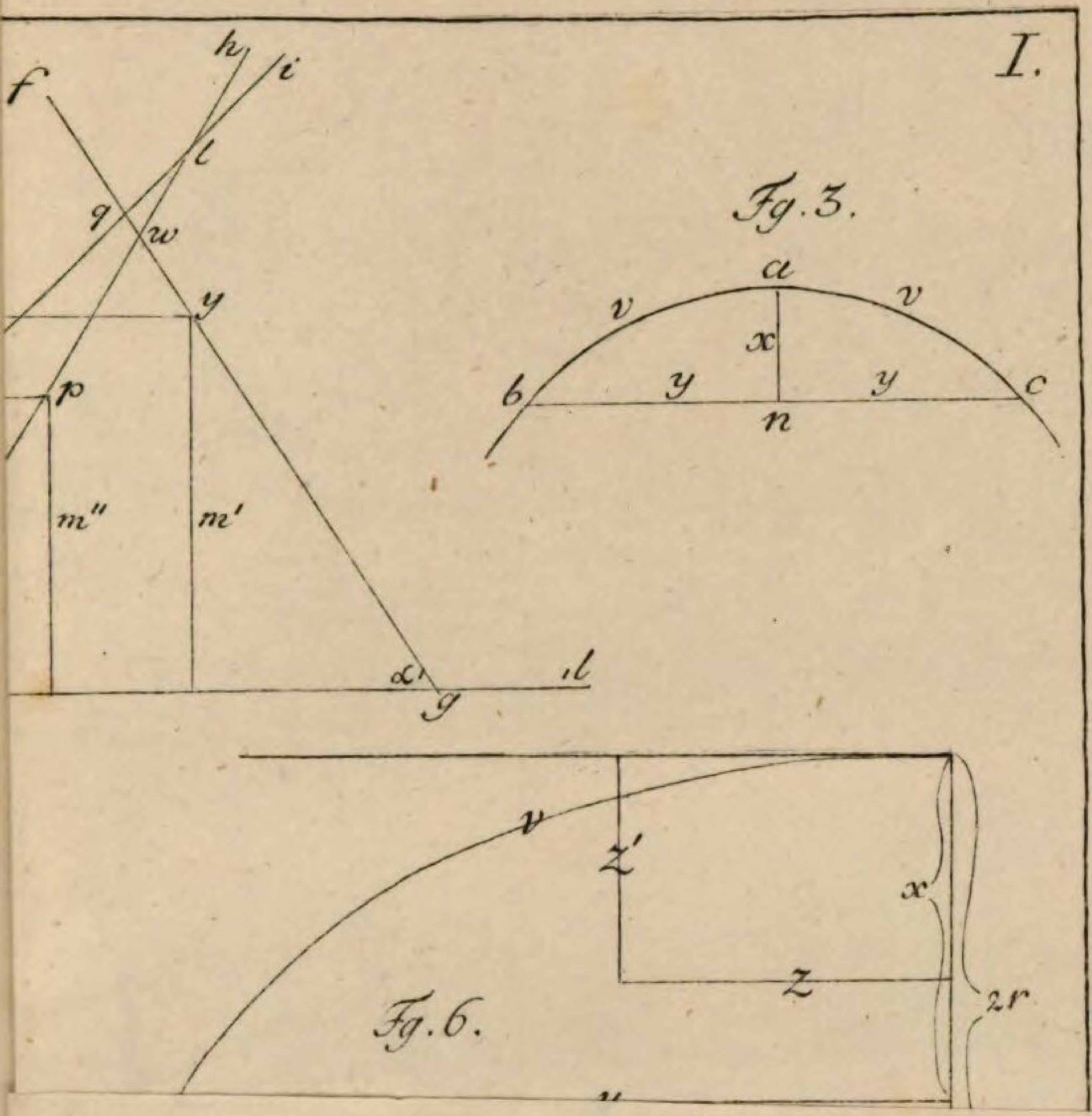
— — Bemerkungen über den Stoßheber mit 3 Kupf. in Fol., gr. 4. 1 Rthlr. 16 gr.

— — praktische Anweisung zur Konstruction der Faschinenwerke, mit 8 Kupfern in Fol. 2te Auflage. gr. 4. 2 Rthlr. 16 gr.

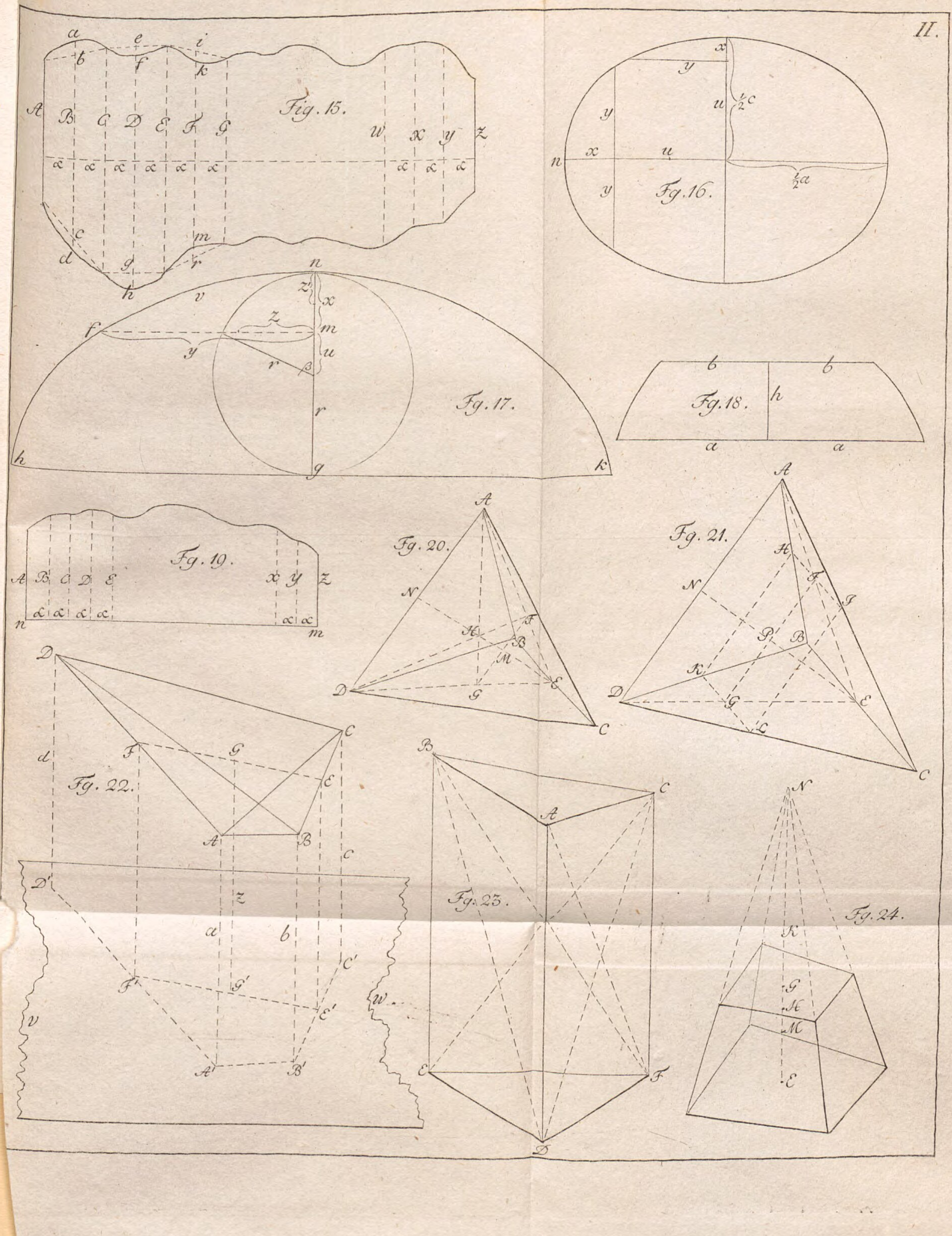
— — Handbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf Architektur, 3 Bde., mit 22 Kupfertaf. in Fol. gr. 8. 7 Rthlr. 12 gr.

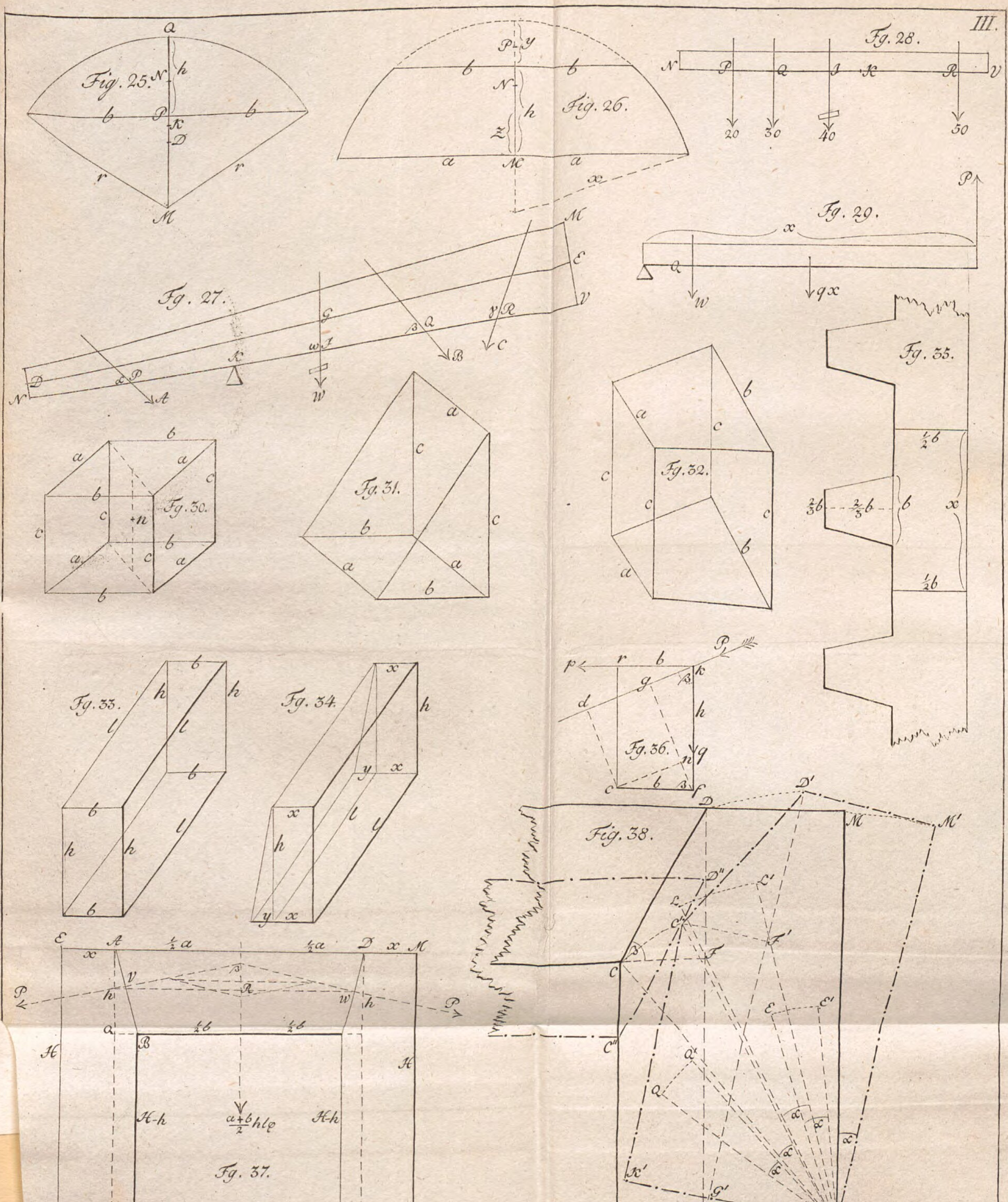
— — Handbuch der Perspective, 2 Thle., mit 18 Kupfertafeln in Fol., gr. 4. 5 Rthlr. 8 gr.

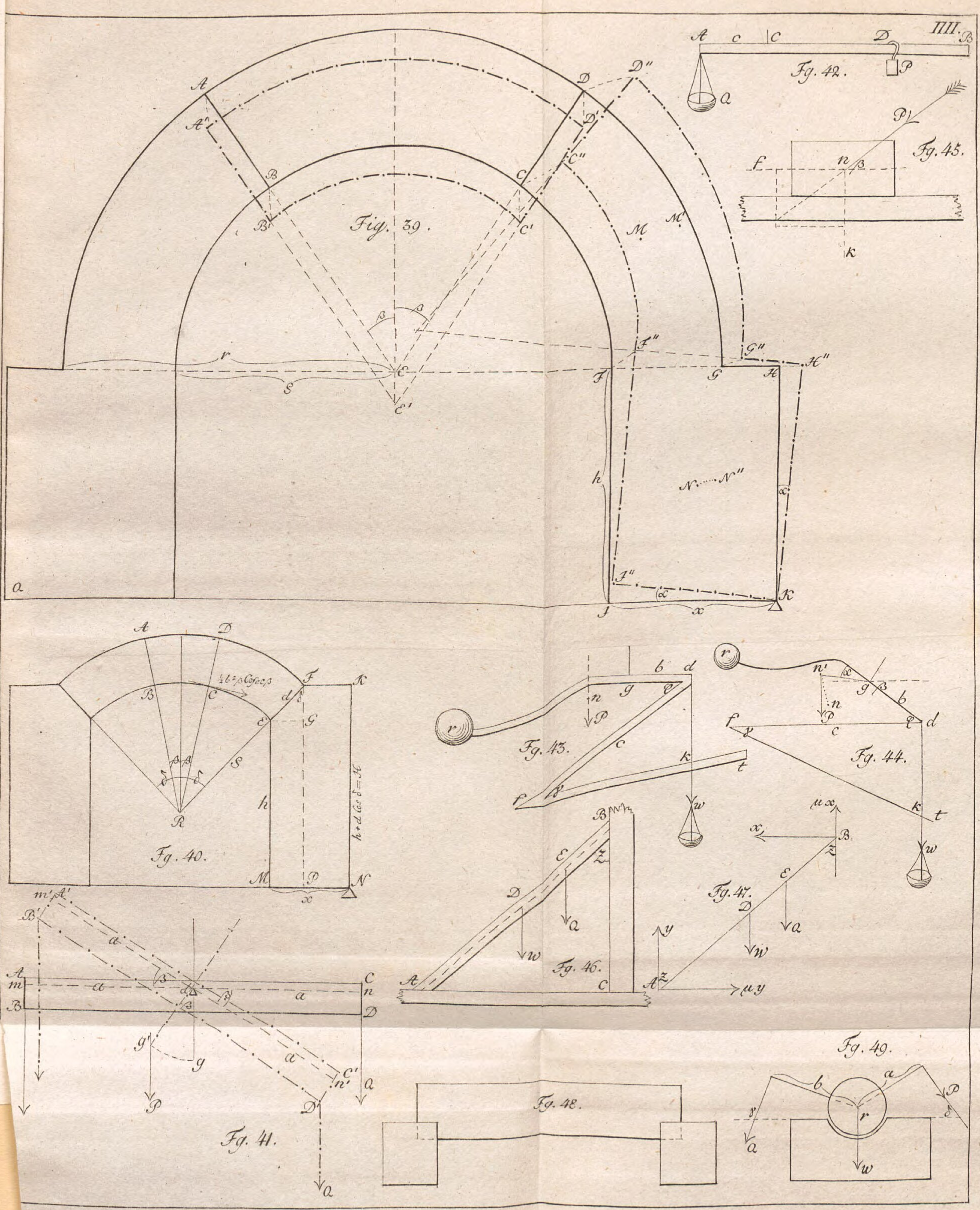
— — Vergleichung der Maaße und Gewichte in Preußen. 2te umgearbeitete Aufl. in 8. 18 gr.
Nachtrag zu diesem Werk.


I.
Fg.3.
a
v
v
x
b
y
y
c
n
f
h
i
l
q
w
y
p
m''
m'
α
g
d
v
z'
x
z
2r
Fg.6.

II.




III.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fg. 27.
Fg. 28.
Fg. 29.
Fg. 30.
Fg. 31.
Fg. 32.
Fg. 33.
Fg. 34.
Fg. 35.
Fg. 36.
Fg. 37.
Fig. 38.


IIII.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.

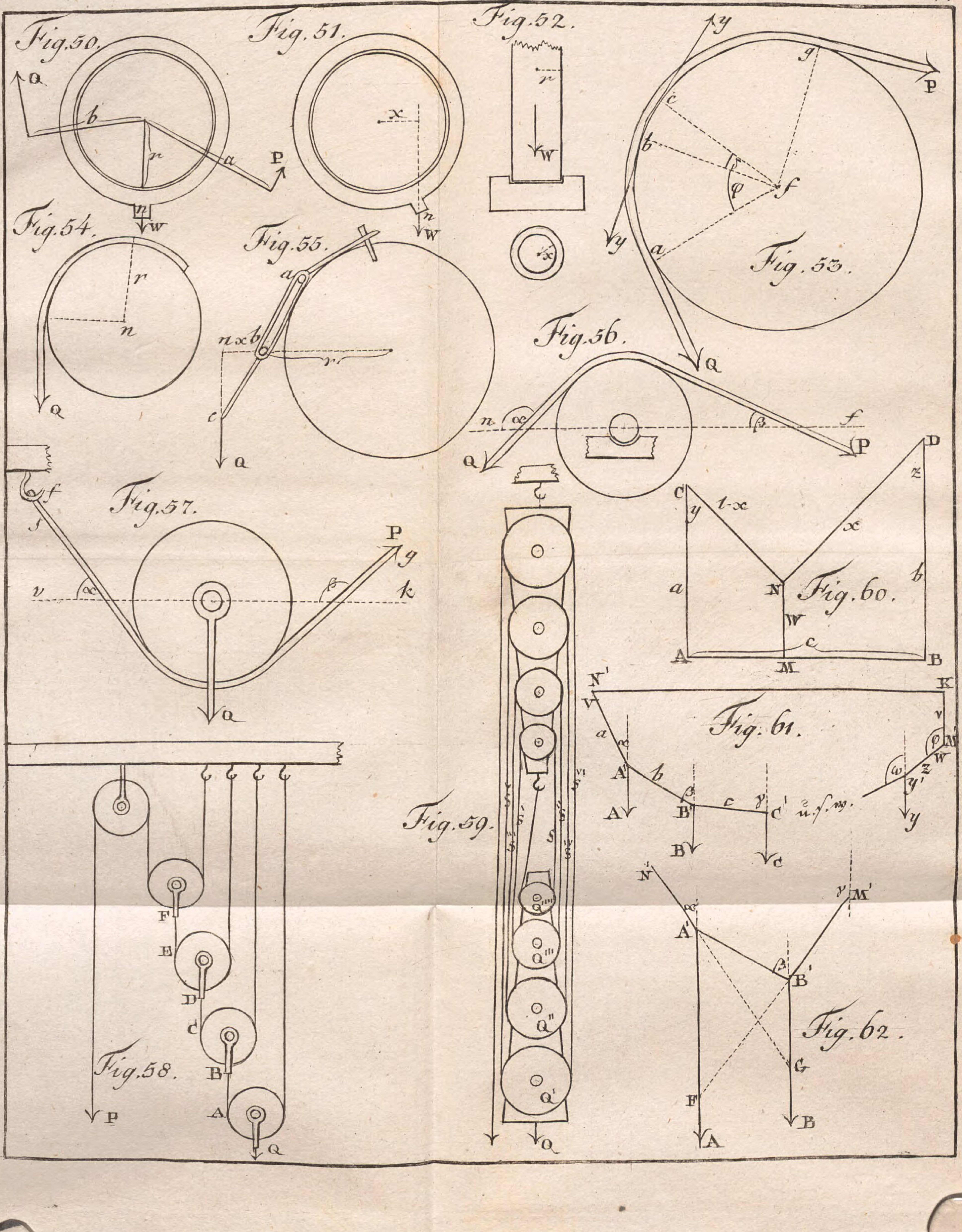


Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.

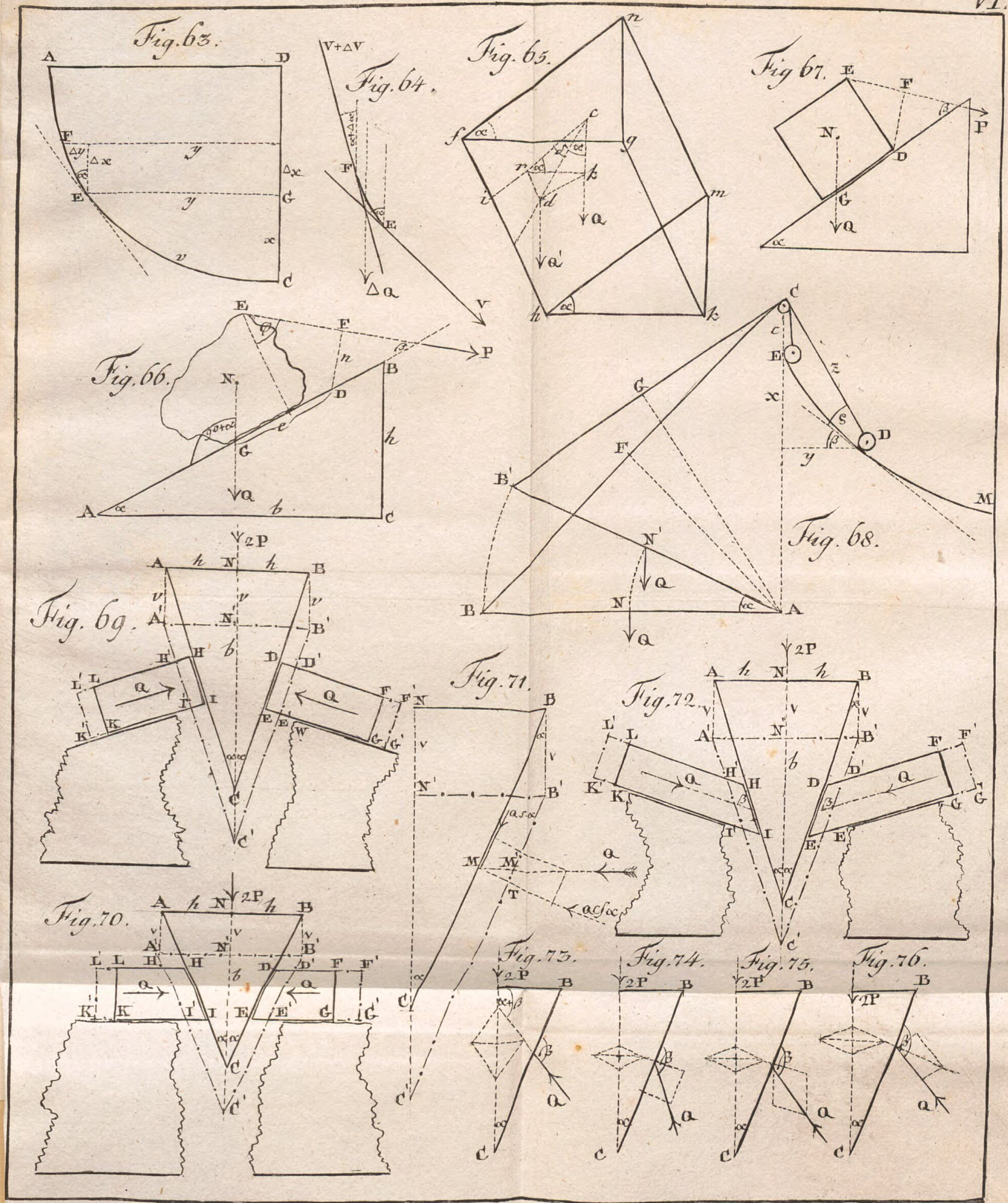


Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.

VII.

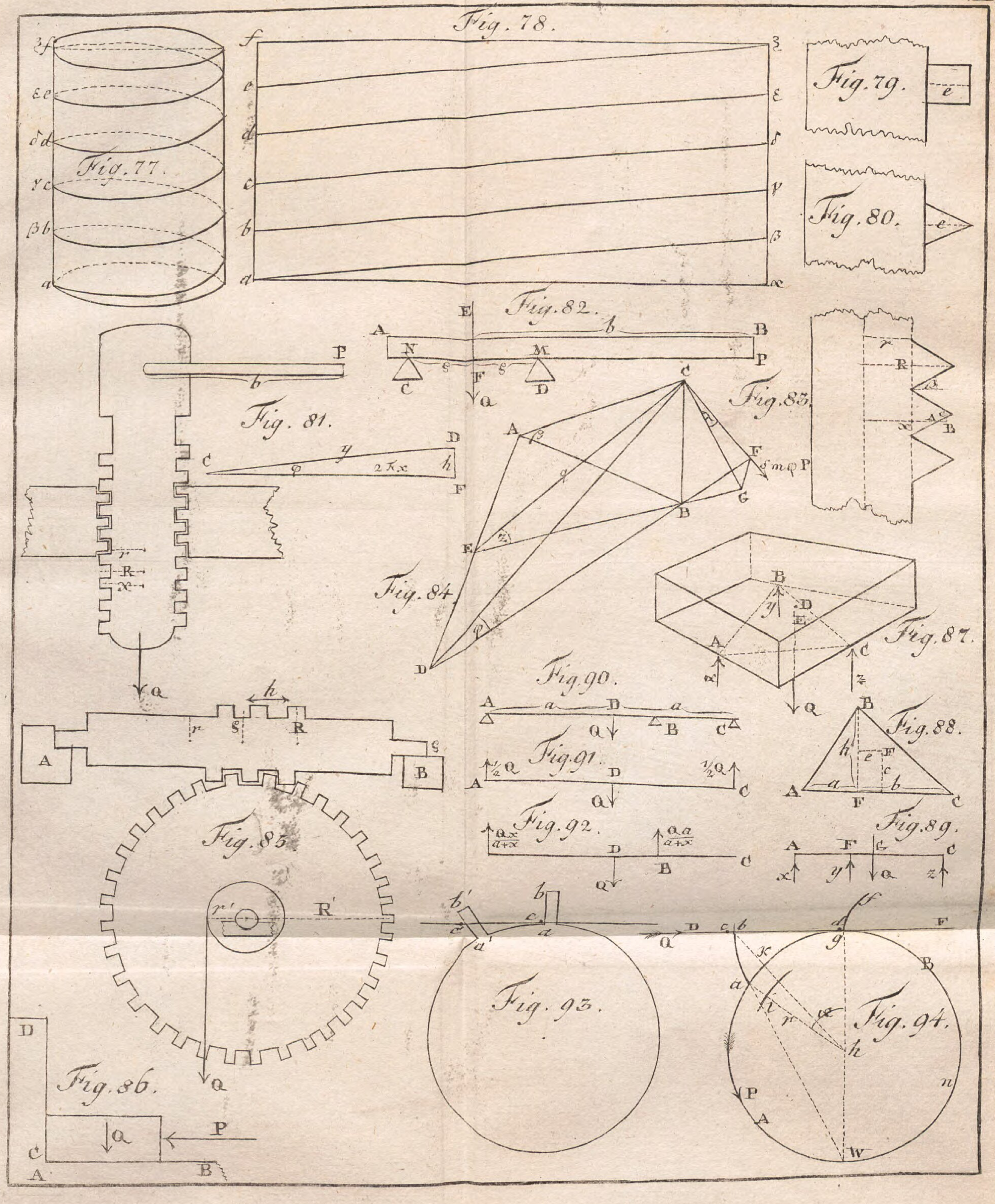


Fig. 78.
Fig. 77.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 82.
Fig. 81.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 87.
Fig. 90.
Fig. 88.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 89.
Fig. 85.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 86.

Fig. 95.

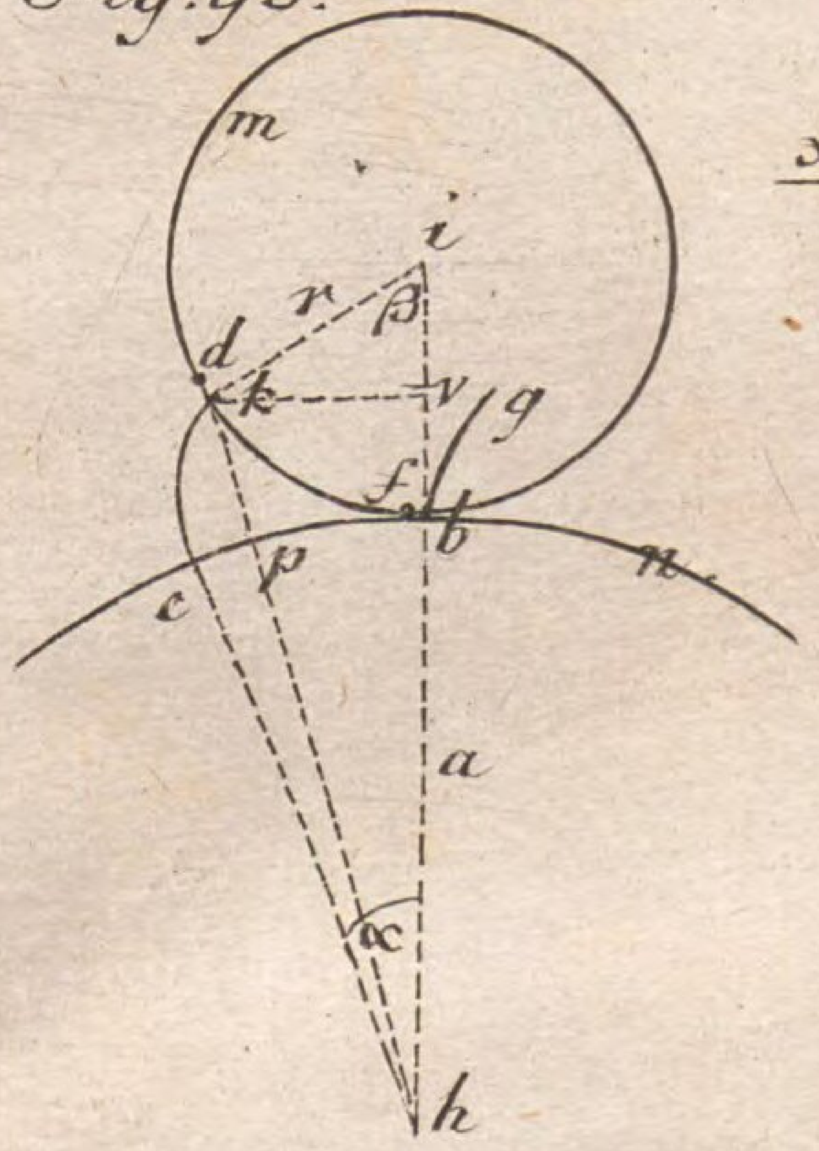


Fig. 96.

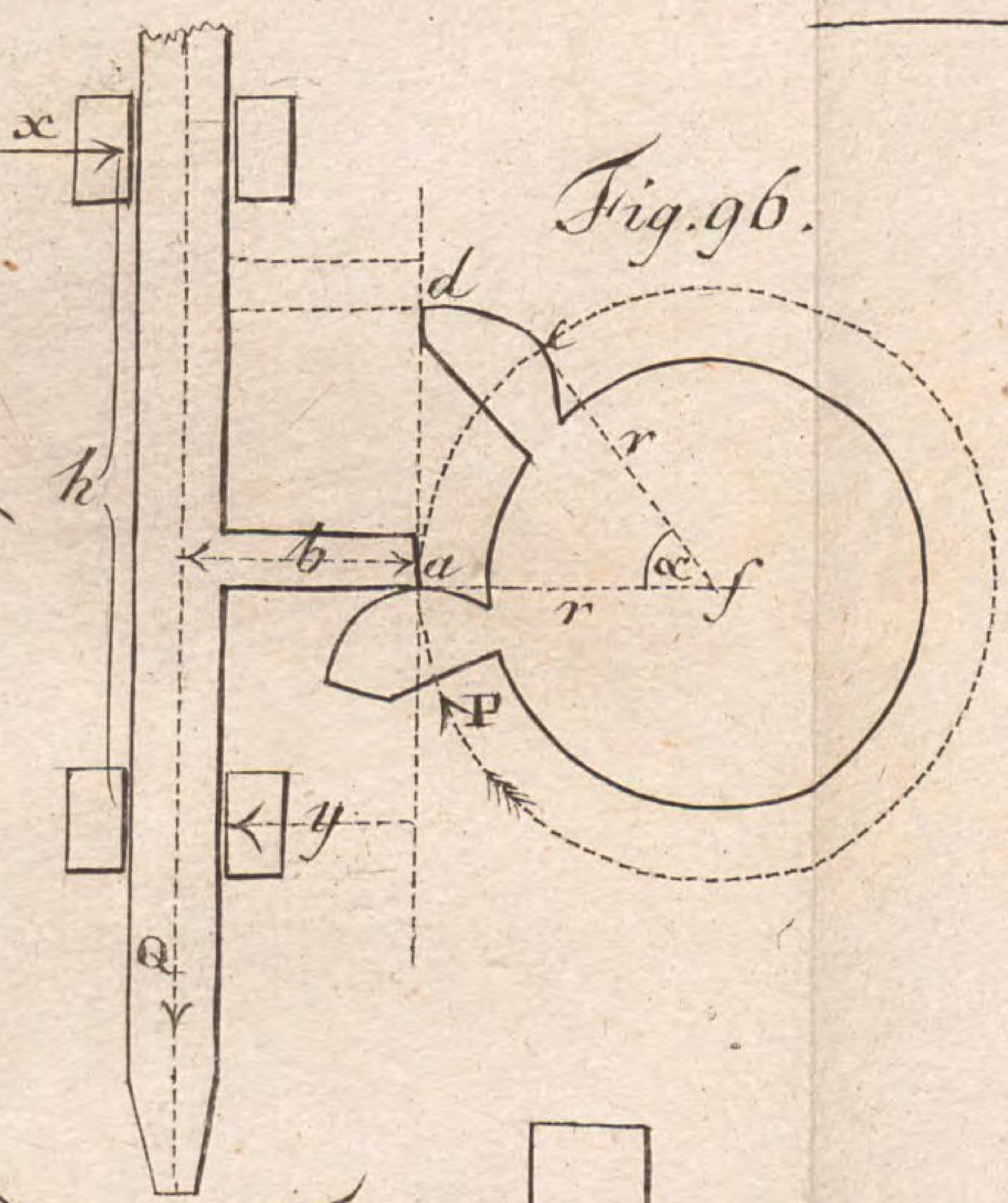
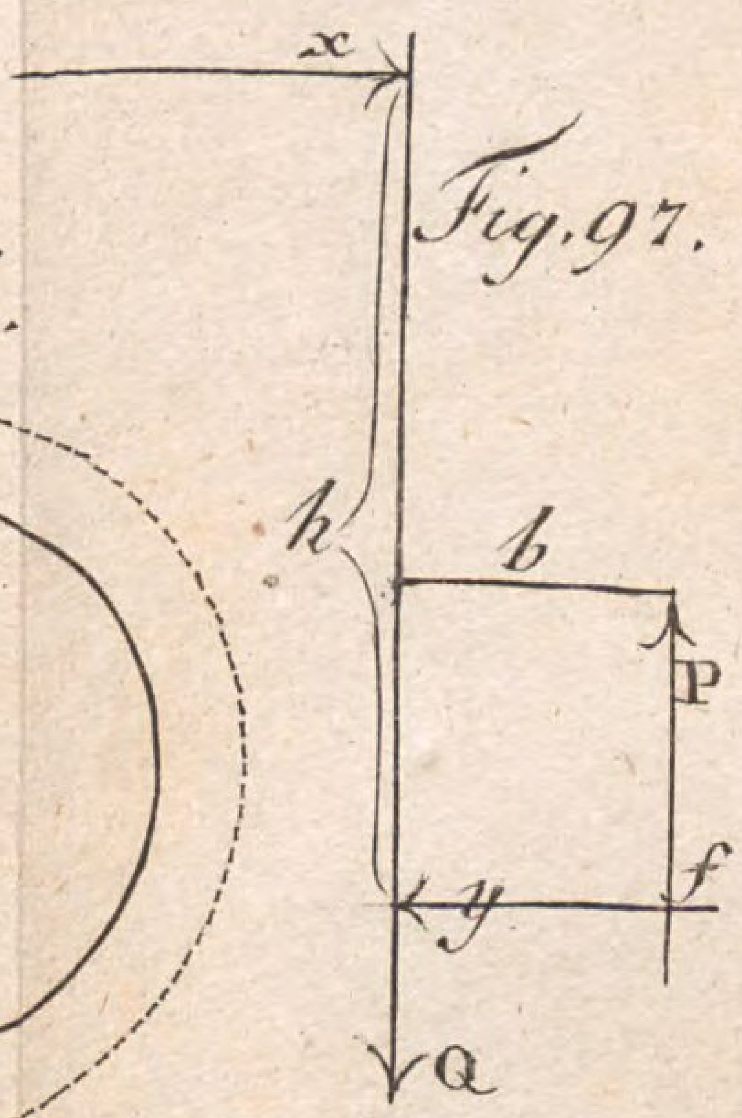


Fig. 97.



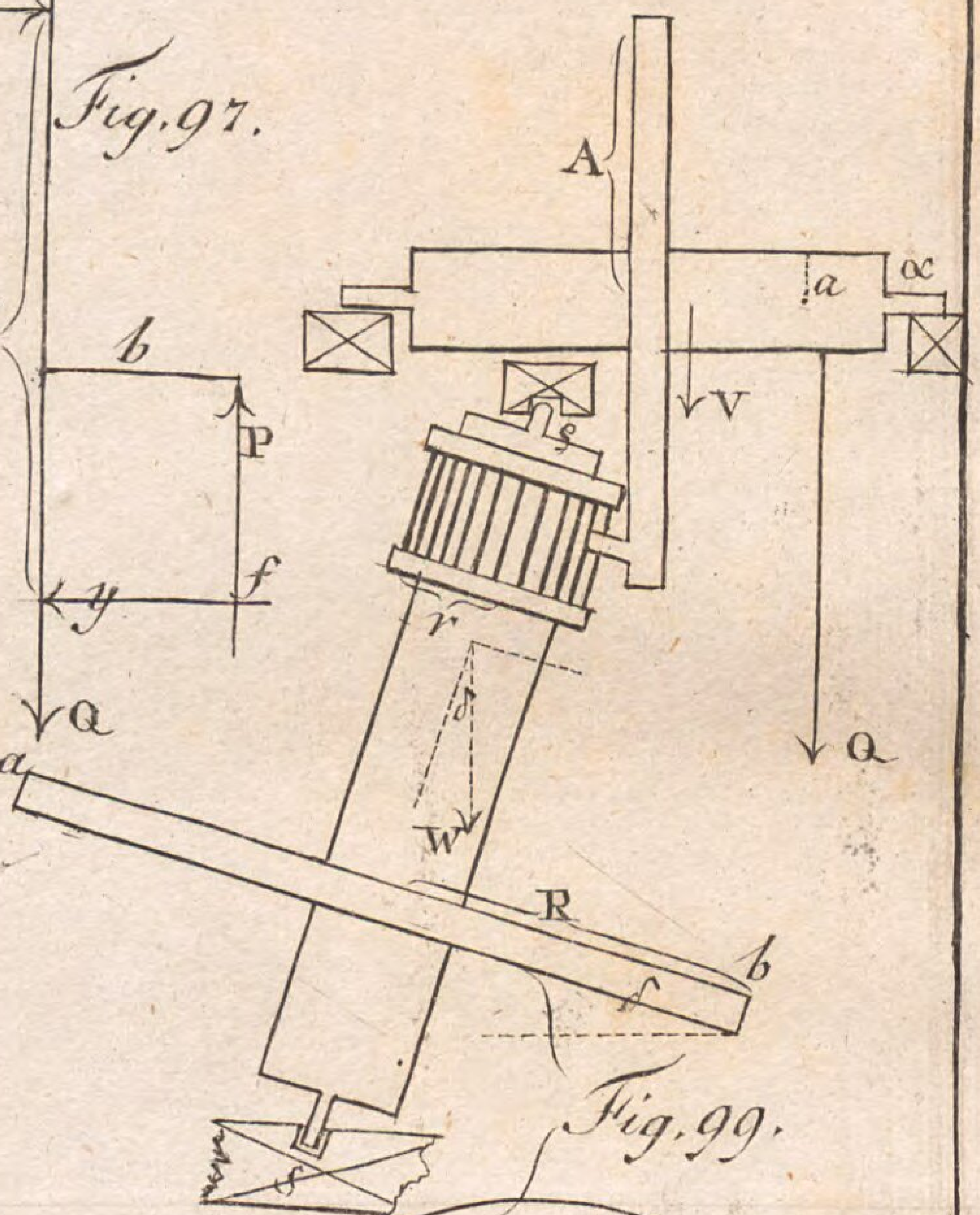


Fig. 98.

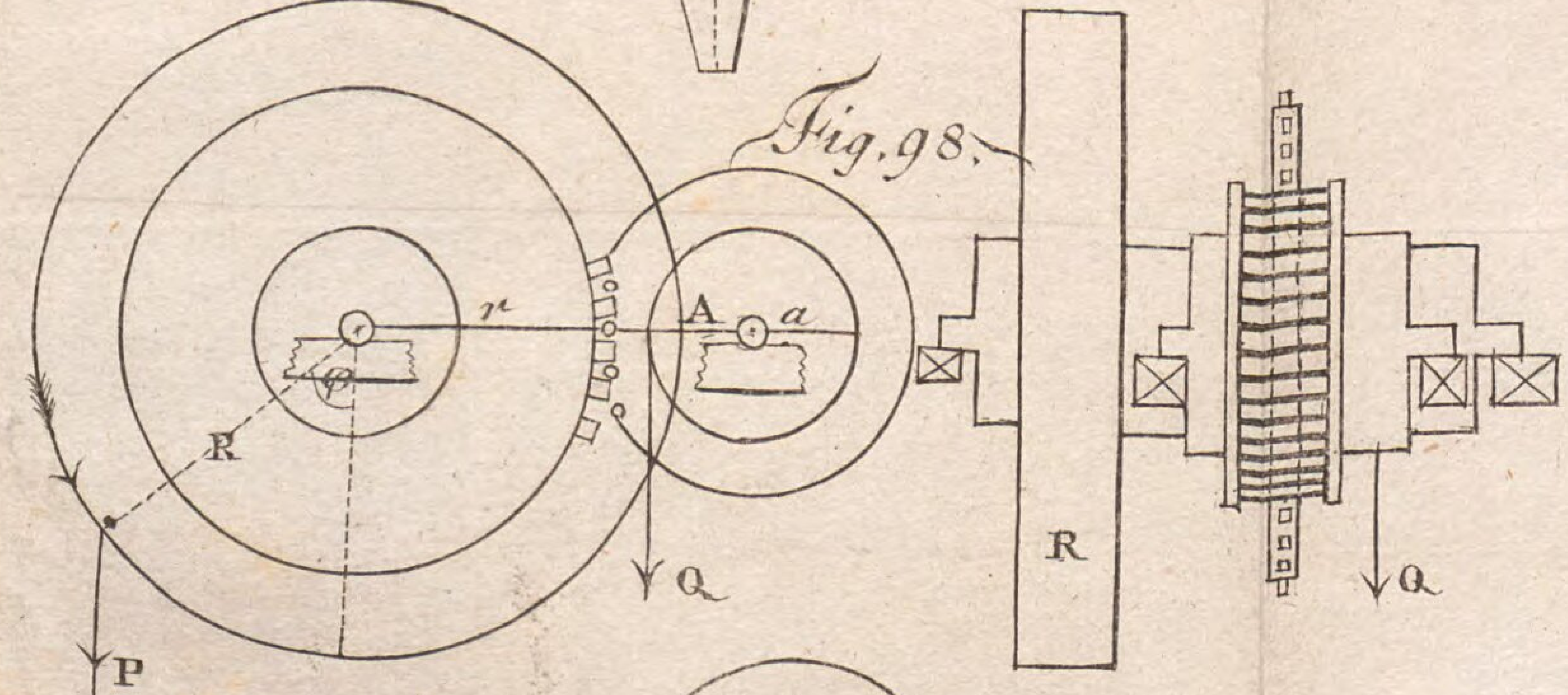


Fig. 99.

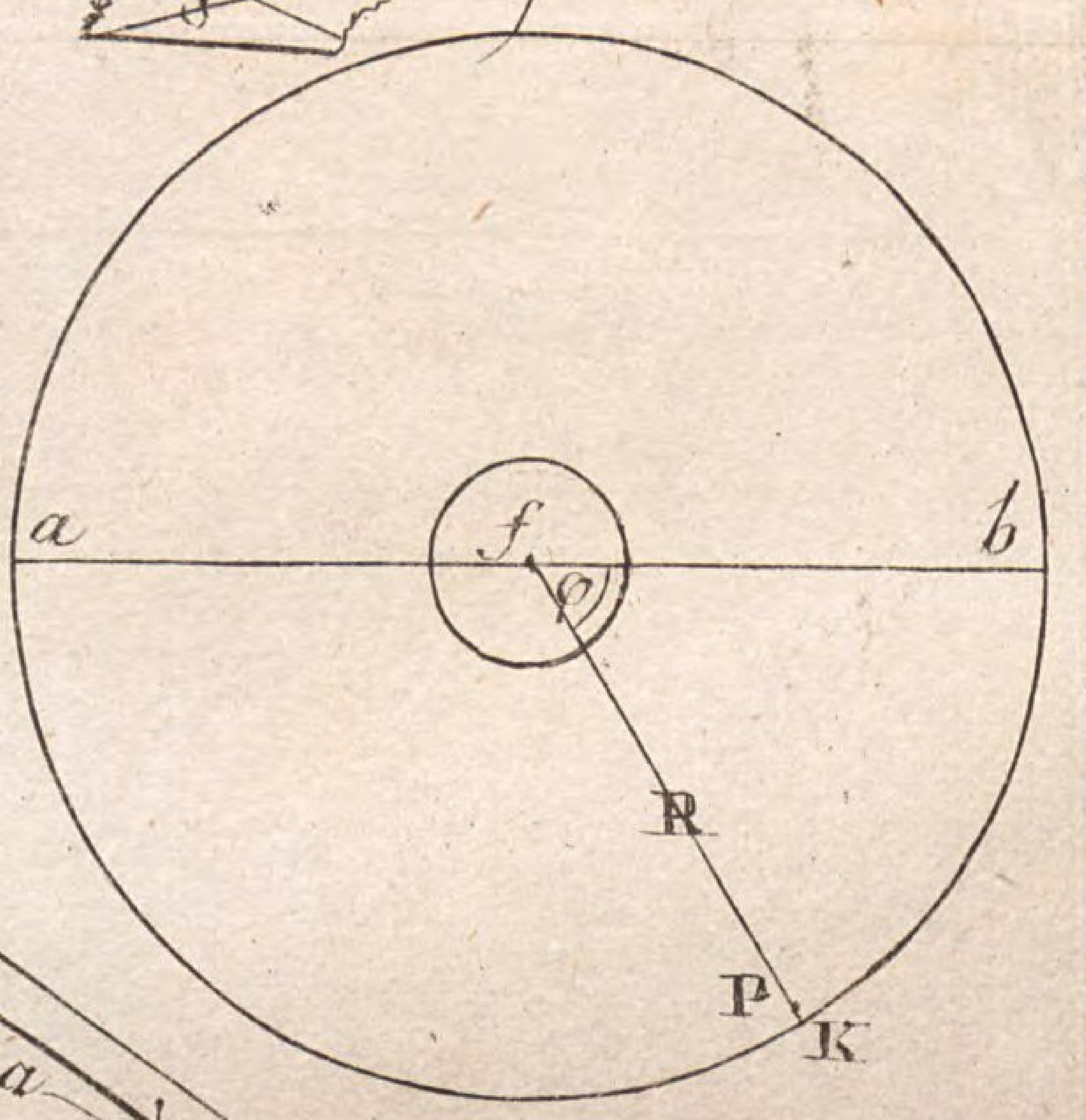


Fig. 100.

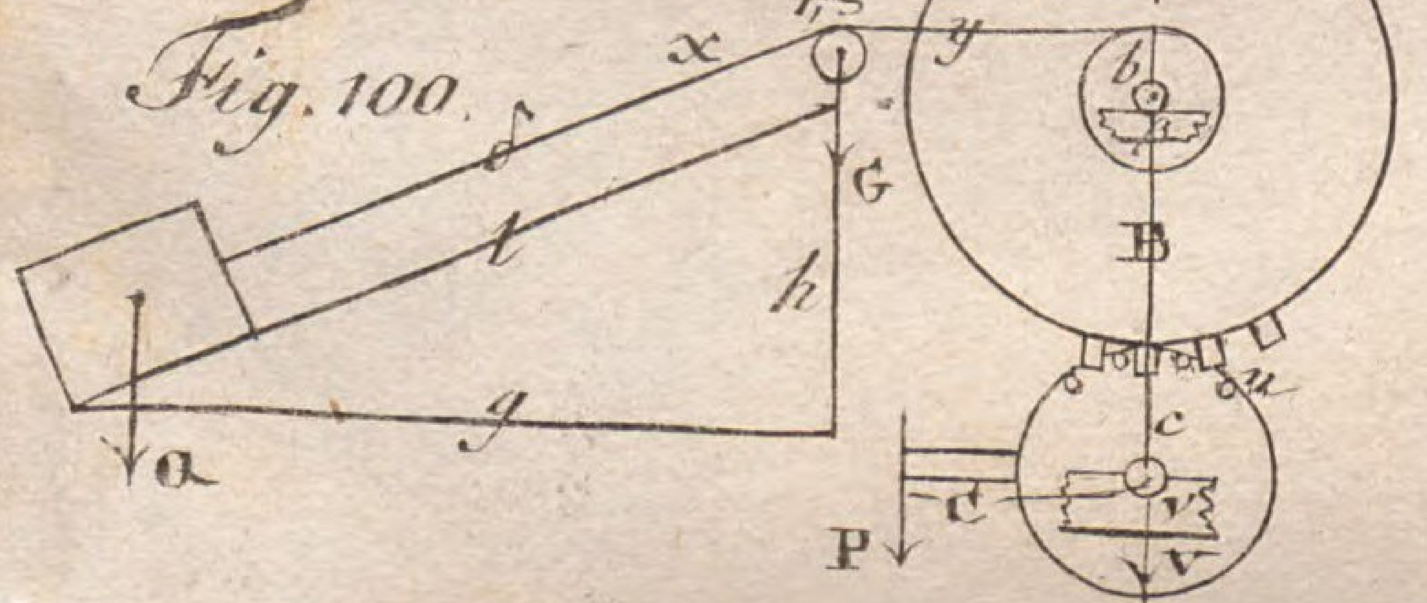


Fig. 101.

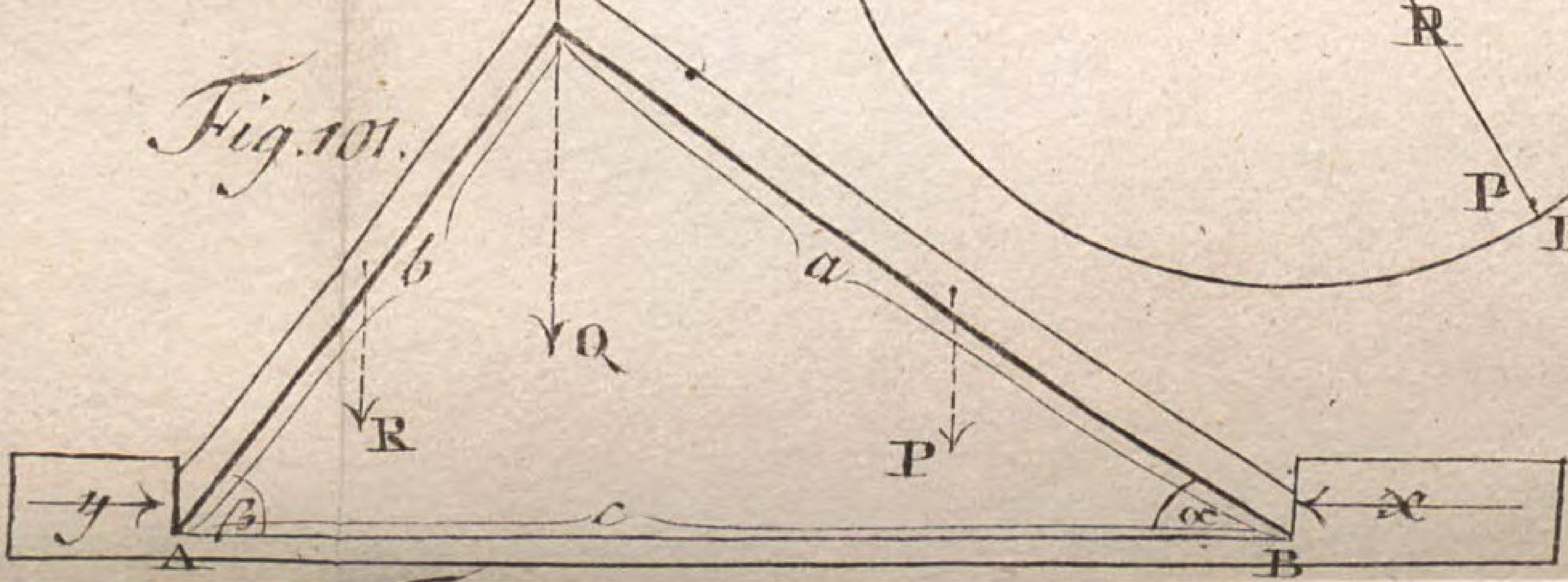


Fig. 102.

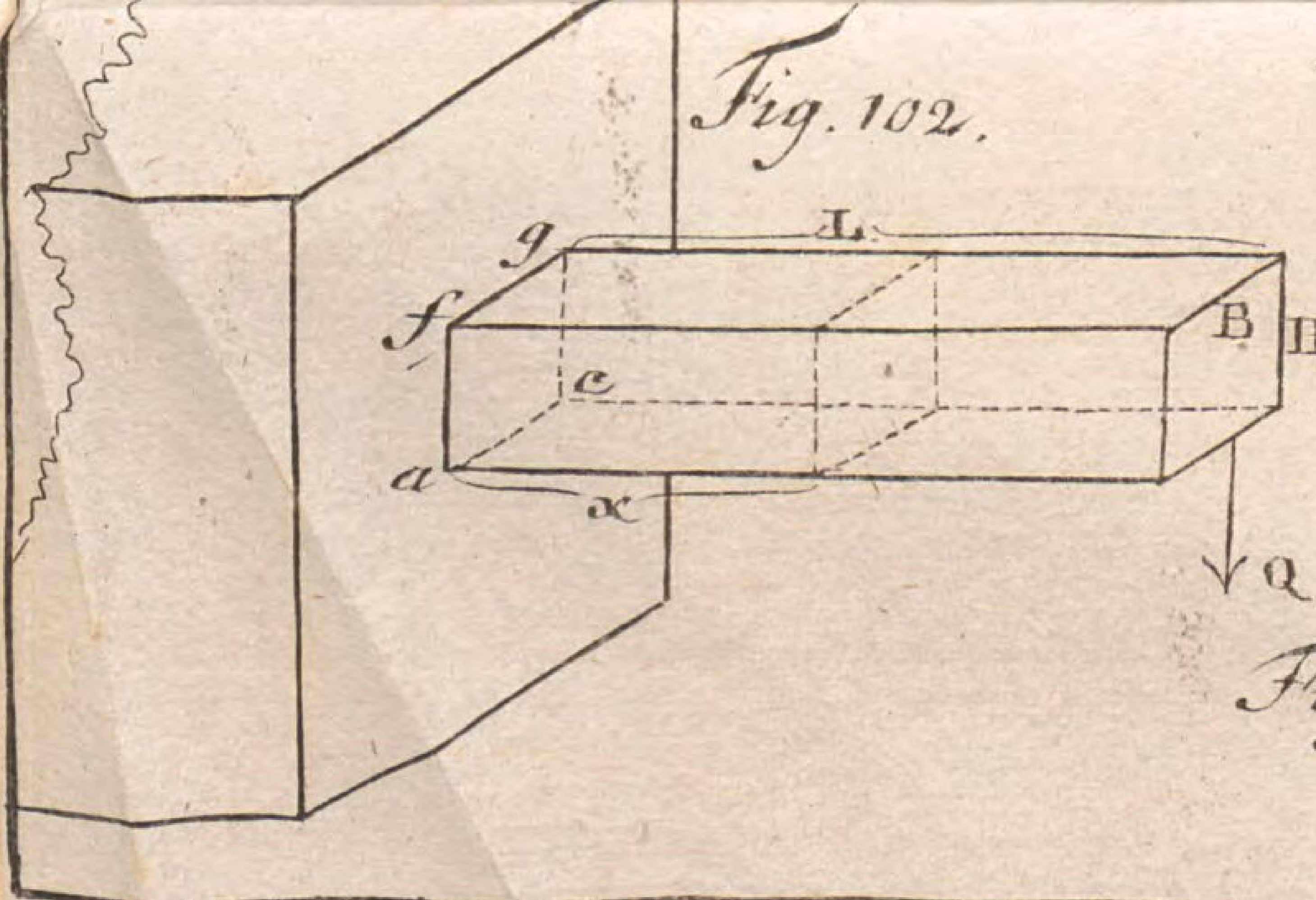


Fig. 103.

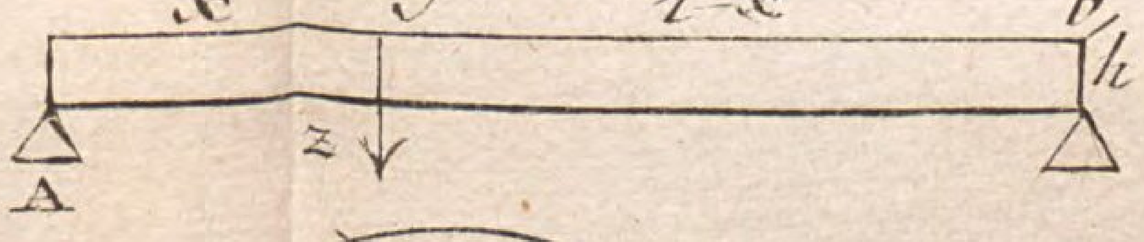


Fig. 104.

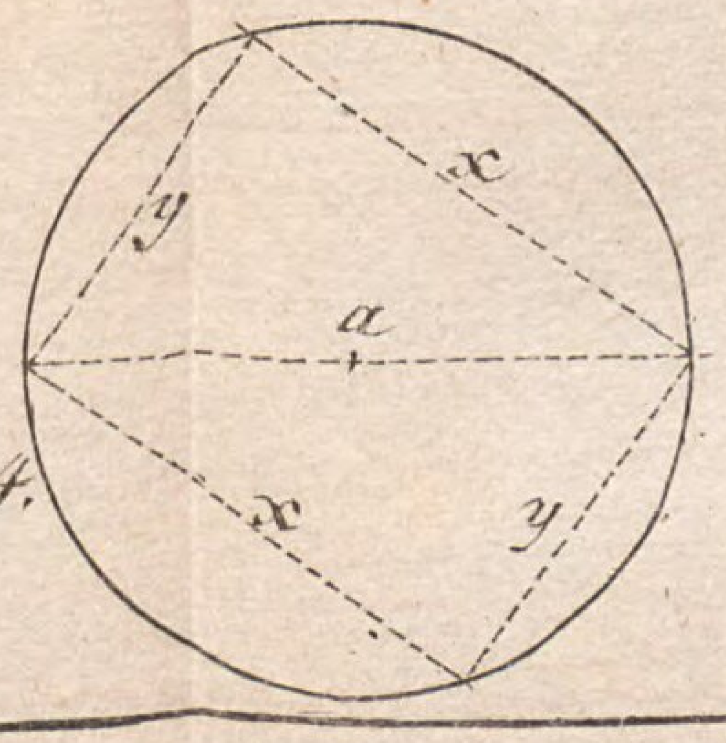
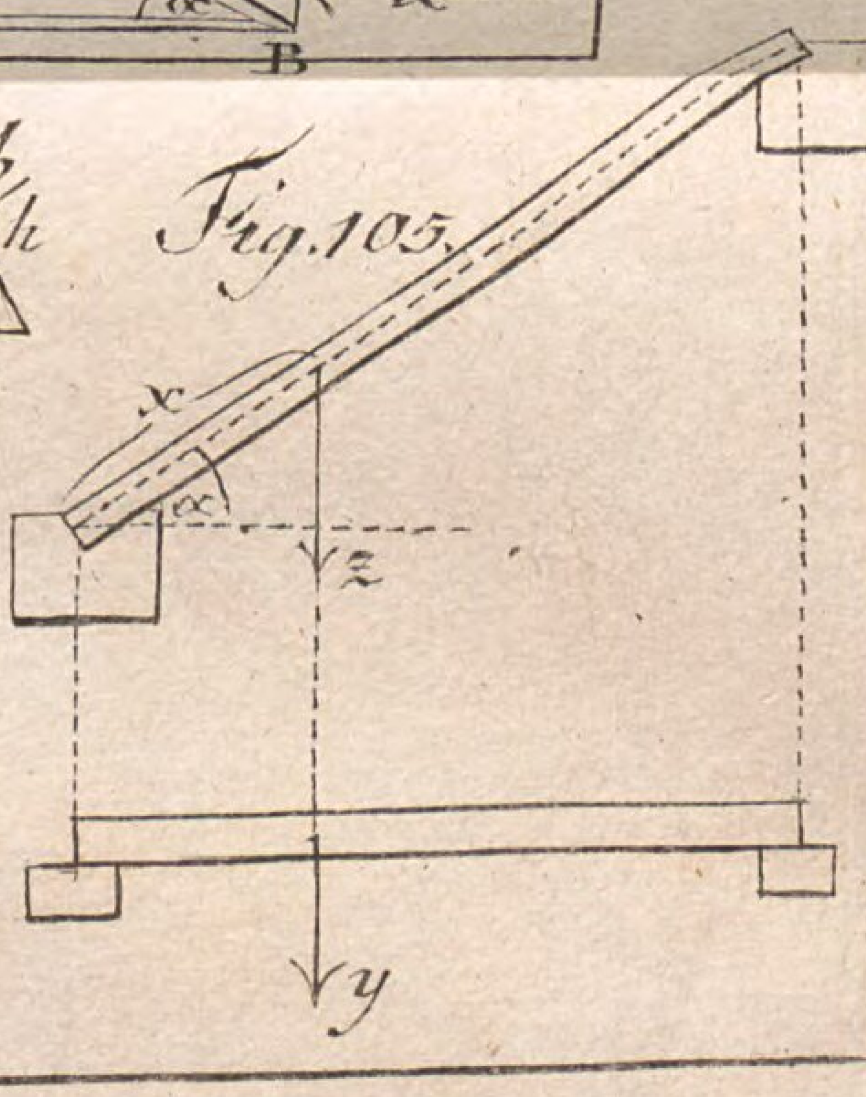


Fig. 105.



Förster Buchh.

Förster Buchh.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lehmus, Daniel Christian Ludolph,

Lehrbuch der angewandten Mathematik

Bd.: Zweites Bändchen

Berlin 1818

Math.a. 154 h-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080894-4